Кружок в хамовниках. группа 10-2

Серия 16. Графский разнобой

1. В компании у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка знаковых содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.

2. В классе 30 человек, один из них Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно пять общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.

3. В связном графе каждое ребро ориентировали. Оказалось, что для любых двух соседних вершин их сумма входящих степеней равна сумме выходящих степеней. Докажите, что либо получившийся граф —- эйлеров, либо исходный граф двудольный

4. В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или пароходом. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать k городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих k городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

5. Пусть M – множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, ..., 2k+1\}$.Существует ли биекция $f : M \to M$ такая, что $A \cap f(A) = \emptyset$?

6. На острове рыцарей и лжецов есть 1001 поселок, соединенные n дорогами так, что от каждого города можно добраться до каждого. В каждом поселке жители только одного из типов. Жители каждого поселка сделали 2 утверждения:

   1. Наш поселок соединен хотя бы с 3 другими поселками.

   2. Наш поселок соединен хотя бы с 2 поселками лжецов.

   Какое наименьшее количество поселков с лжецами может быть на острове?

   (a) Если $n > 1000$

   (b) Если $n = 1000$