Серия 11. Геометрия.

Что-то из старого.

1-10. A convex quadrilateral $ABCD$ is circumscribed about a circle ω. Let PQ be the diameter of ω perpendicular to AC. Suppose lines BP and DQ intersect at point X, and lines BQ and DP intersect at point Y. Show that the points X and Y lie on the line AC.

3-7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$.

5-7. На стороне AC теругольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

8-9. Triangle BCF has a right angle at B. Let A be the point on line CF such that $FA = FB$ and F lies between A and C. Point D is chosen so that $DA = DC$ and AC is the bisector of $\angle DAB$. Point E is chosen so that $EA = ED$ and AD is the bisector of $\angle EAC$. Let M be the midpoint of CF. Let X be the point such that $AMXE$ is a parallelogram. Prove that BD, FX and ME are concurrent.

9-6. Окружность ω проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AC и AB в точках D и E соответственно. На луче BD отметили точку K так, что $|BK| = |AC|$. На луче CE отметили точку L так, что $|CL| = |AB|$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на окружости ω.

Новые задачи.

1. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P. Через P проводится случайная прямая, пересекающая стороны угла B и C. Докажите, что величина $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ постоянна.

2. а) В угол величиной α с вершиной A вписана окружность ω, которая касается сторон угла в точках B и C. Известно, что $AB = AC = a$. На луче за точку B отмечена точка X. Из точки X проведены вторая касательная к ω, пересекающая AC в точках Y. Выразите AY через AX, a и α.
б) Let AB and AC be two distinct rays not lying on the same line, and let ω be a circle with center O that is tangent to ray AC at E and ray AB at F. Let R be a point on segment EF. The line through O parallel to EF intersects line AB at P. Let N be the intersection of lines PR and AC, and let M be the intersection of line AB and the line through R parallel to AC. Prove that line MN is tangent to ω.

3. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC вторично пересекает описанную окружность в точке A_0. Точка B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают AA_0 в точках B_2 и C_2. Докажите, что площади треугольников $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равны.

Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-2.

Серия 10. Разнобой.

1. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667
2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних.
3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах
4. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному
5. Пусть $\sigma(n)$ - сумма делителей числа n. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n$.
6. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество параллелограммов площади 1 с вершинами в этих точках не превосходит $\frac{n^2-3n}{4}$

Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-2.

Серия 10. Разнобой.

1. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667
2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних.
3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах
4. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному
5. Пусть $\sigma(n)$ - сумма делителей числа n. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n$.
6. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество параллелограммов площади 1 с вершинами в этих точках не превосходит $\frac{n^2-3n}{4}$