Серия 15. Немного неравенств.

1. If $x, y, z, t > 0$. Then prove that $\frac{xyz}{t^2} + \frac{yzt}{x^2} + \frac{xzt}{y^2} + \frac{xyt}{z^2} > x + y + z + t$.

2. Произведение чисел x и y равно 1. Для какой наибольшей константы c заведомо верно неравенство $x^2 + y^2 \geqslant c(x - y)$?

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b^2 + c^2 + a^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c^2 + a^2 + b^2}{(c+a)(c+b)} \leqslant 3\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

4. Для положительных a, b, c докажите неравенство:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

5. Положительные числа a, b, c, d таковы, что

$$abcd = 1 \qquad \text{и} \qquad a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Докажите, что

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Домашнее задание.

6. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причем в каждой его вершине сходится нечетное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.

7. Обозначим $\sigma(n)$ сумму делителей числа n. Докажите, что для нечёного n выполнено $\sigma(n)^3 < n^4$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF. Две окружности, проходящие через точки A и F, касаются прямой BC в точках P и Q так, что B лежит между C и Q. Докажите, что прямые PE и QF пересекаются на описанной окружности треугольника AEF.

Рубрика “Намедни”.

7-3. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что многочлен

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

является константой.

7-4. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(P(n) + n)$$

является простым числом для бесконечного количества натуральных n.

7-5. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $2^n - 1$ делится на $P(n)$ при всех натуральных n.

7-6. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что для них существует некоторый многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами такой, что для всех натуральных n выполнено равенство

$$P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = P(n)Q(n)$$

1-8. Докажите, что существует бесконечно много четвёрок натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них, увеличенное на 1, является точным квадратом.

Эти задачи будут разобраны в 18:00 29 ноября.