

## Серия 17. Жемчужины комбинаторики.

### Точно было.

1.(9-4) Клетки таблицы  $3n \times 3n$  покрашены диагональной раскраской в зелёный, красный и синий цвет. В клетках таблицы расставлены по  $3n^2$  фишек зелёного, красного и синего цвета. Известно, что для некоторого  $d$  можно так переставить фишки, чтобы каждая фишка переместилась не более, чем на  $d$  и каждая зелёная фишка оказалась там, где раньше была красная, каждая красная оказалась там, где раньше была синяя, а каждая синяя оказалась там, где раньше была зелёная. Докажите, что можно переставить фишки так, чтобы каждая фишка переместилась не более, чем на  $d + 2$  и каждая фишка оказалась в клетке того же цвета.

2(со сборов). Не более 8% жителей государства — враги народа. Известно, что у каждого гражданина этого государства менее 500 знакомых. На день рождения президента каждый гражданин государства сделал ему подарок: написал в Департамент анонимное письмо, разоблачающее одного из знакомых ему врагов народа. При этом известно, что честные граждане разоблачали только истинных врагов, а враги могли как разоблачить других врагов, так и оклеветать честных граждан. Докажите, что на основании полученных данных Департамент может посадить некоторое количество граждан так, чтобы больше половины посаженных была врагами народа.

3(со сборов). Дана последовательность,  $n$ -ый член которой есть первая цифра числа  $2^n$ . Рассматриваются 13-значные числа, записанные тринадцатью идущими подряд цифрами этой последовательности. Докажите, что имеется ровно 57 различных чисел такого вида.

---

### Вроде было.

4. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки  $1 \times 1$ . В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты  $(i, j)$  и поставить по фишке в клетки  $(i + 1, j)$  и  $(i, j + 1)$ , при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

5. В клетки таблицы размером  $m \times n$  записали различные действительные числа. Пусть  $l \leq m$ ,  $k \leq n$ . В каждом столбце подчеркнули  $l$  наибольших чисел, а в каждой строке —  $k$  наибольших. Докажите, что по крайней мере  $kl$  чисел подчёркнуты дважды.

6. На бесконечном белом клетчатом листе бумаги  $n$  клеток покрасили в чёрный цвет. Каждую минуту каждая клетка  $K$  перекрашивается в цвет, в который покрашено хотя бы две из таких трёх клеток: сама клетка  $K$ , соседняя сверху и соседняя слева. Докажите, что не позднее, чем через  $n$  минут все клетки станут белыми.

---

### Вроде не было.

7. Рёбра полного графа на  $n$  вершинах покрашены в а) 2; б) 3 цвета. Для какого наименьшего  $n$  можно утверждать, что найдётся одноцветный треугольник?

8. В некоторой стране из каждого города в другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездок по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирали любой из них), и так до тех пор, пока не пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту, если:

- а) стоимости билетов равны 0 или 1;
- б) стоимости билетов произвольные.