Серия 18. О баянах и пифагоровых тройках.

1. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что $a+b+c+d$ — составное число.

2. Натуральные числа $a_1, a_2, a_3, \dots a_k, b_1, \dots b_l$ таковы, что $\prod a_i = \prod b_j$. Обязательно ли существуют такие натуральные n_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $a_i = \prod\limits_{j=1}^{l} n_{ij}$, а $b_j = \prod\limits_{i=1}^{k} n_{ij}$?

3. Взаимно простые натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что если a — нечётное число, то существуют такие натуральные u и v, что $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$.

4. Попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 = 2c^2$. Докажите, что для некоторых целых u и v выполнено

$$\begin{aligned} a &= |u^2 - v^2 + 2uv| \\ b &= |v^2 - u^2 + 2uv| \\ c &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

5. Найдите все такие целые a, b, c, что $a^2 + 3b^2 = c^2$.

6. Могут ли четыре различных точных квадрата образовывать арифметическую прогрессию?

7. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 = cd$. Докажите, что существуют такие целые x, y, z, w, t, что

$$c = t(x^2 + y^2),\ d = t(z^2 + w^2),\ a = t(xz - yw),\ b = t(xw + yz)$$

Домашнее задание.

8. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral inscribed in a circle with center O which does not lie on either diagonal. If the circumcentre of triangle AOC lies on the line BD, prove that the circumcentre of triangle BOD lies on the line AC.

9. Числа $x_1, x_2, \dots x_n \in [-1, 1]$ удовлетворяют равенству $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$.

Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$