Серия 19. Немного о кривых.

1. Дан график многочлена степени 3. Провели 2 параллельные прямые l_1, l_2, каждая из которых пересекает график в трёх точках. В результате между прямыми оказались три части графика. Каждую из этих частей спроектировали на ось Ox и получили три отрезка. Докажите, что длина одного из этих отрезков равна сумме длин двух других.

2. Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек $\ldots P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, \ldots$ так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c коллинеарны тогда и только тогда, когда $a + b + c = 2015$.

3. A *cubic sequence* is a sequence of integers given by $a_n = n^3 + bn^2 + cn + d$, where b, c and d are integer constants and n ranges over all integers, including negative integers.
(a) Show that there exists a cubic sequence such that the only terms of the sequence which are squares of integers are a_{2015} and a_{2016}.
(b) Determine the possible values of $a_{2015} \cdot a_{2016}$ for a cubic sequence satisfying the condition in part **(a)**.

4(для любителей погрузиться в теорию). Рассмотрим какую-нибудь кривую Γ, заданную уравнением $P(x, y) = 0$, где P — многочлен степени 3 с целыми коэффициентами. Зафиксируем на ней точку E с рациональными координатами. Для произвольных точек $A, B \in \Gamma$ определим сумму $A + B$: если прямая AB в третий раз пересекает Γ в точке X, а прямая XE пересекает Γ в точке Y, то $A + B = Y$.
а) Докажите, что у любых двух точек есть сумма.
б) Докажите, что сумма рациональных точек — рациональная точка.
в) Докажите, что операция сложения точек является коммутативной и ассоциативной.

Домашнее задание.

5. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через точки A_1 и B_1, в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

6. Существует ли такая ограниченная последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любых натуральных $m > n$ выполнено неравенство $|a_m - a_n| > \frac{1}{m-n}$?

Рубрика “Намедни”.

1-7. Докажите, что натуральное число N является числом Фибоначчи тогда и только тогда, когда $5N^2 + 4$ или $5N^2 - 4$ ялвяется квадратом натурального числа.

3-7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30°$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60°$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$.

6-7. В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или пароходом. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать k городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих k городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

6-8. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca).$$

а) Докажите, что каждое из чисел a, b, c — точный квадрат.
б) Конечно ли множество таких троек (a, b, c)?