Серия 1. Уравнения Пелля. Часть 1.

Упражнение 1. Натуральные числа a и b таковы, что $(2+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$. Докажите, что $a^2 - 3b^2 = 1$.

Упражнение 2. Докажите, что у уравнения $x^2 - 5y^2 = 1$ бесконечно много решений в натуральных числах.

Определение. Уравнение вида $x^2 - dy^2 = 1$, где d не является квадратом натурального числа, называется *уравнением Пелля.*

В задачах зафиксируем определённое значение d, не являющееся точным квадратом.

Определение. Назовём число вида $a + b\sqrt{d}$, где a и b — целые числа, *хорошим* и *замечательным*, если при этом a и b больше 0. *Нормой* хорошего числа $a + b\sqrt{d}$ назовём выражение $a^2 - db^2$. Норму числа x будем обозначать $N(x)$.

Упражнение 3. Докажите, что сумма, разность и произведение хороших чисел является хорошим числом.

Упражнение 4. Докажите, что норма произведения двух хороших чисел равна произведению норм.

Определение. Скажем, что одно хорошее число делится на другое, если их частное — хорошее число.

Упражнение 5. Докажите, что если норма хорошего числа равна 1, то на него делится любое хорошее число.

1. а) Пусть x — минимальное замечательное число, норма которого равна 1, y — другое замечательное число с нормой 1. Докажите, что y является степенью числа x.
Подсказка: возьмите наименьший контрпример.
б) Пусть (a, b) — наименьшее решение уравнения Пелля. Тогда для любого другого решения (s, t) верны равенства:

$$s = \frac{(a+b\sqrt{d})^n + (a-b\sqrt{d})^n}{2}$$

и

$$t = \frac{(a+b\sqrt{d})^n - (a-b\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}$$

для некоторого n.

Решите в натуральных числах:

2. $x^2 + y^2 = 4xy + 1$.

3. $a^2 - 2016b^2 = 1$.

4. $a^2 - 3b^2 = 13$.

5. Найдите все такие натуральные n, для которых $2n+1$ и $3n+1$ — точные квадраты.

6. Let $P(a)$ be a largest prime positive divisor of $a^2 + 1$. Prove that exist infinitely many positive integers a, b, c such that $P(a) = P(b) = P(c)$.

7. Докажите, что натуральное число N является числом Фибоначчи тогда и только тогда, когда $5N^2 + 4$ или $5N^2 - 4$ ялвяется квадратом натурального числа.

8. Докажите, что существует бесконечно много четвёрок натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них, увеличенное на 1, является точным квадратом.

---

9. Пусть G — ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов, в котором из любой вершины до любой другой существует ориентированный путь. Для произвольной раскраски вершин графа G в два цвета назовём его вершину плохой, если все вершины, в которые из неё ведут рёбра, покрашены в тот же цвет, что и она сама. Обозначим через $k(G)$ наименьшее возможное количество плохих вершин при раскраске вершин графа G в два цвета. Какие значения может принимать $k(G)$?

10. A convex quadrilateral $ABCD$ is circumscribed about a circle ω. Let PQ be the diameter of ω perpendicular to AC. Suppose lines BP and DQ intersect at point X, and lines BQ and DP intersect at point Y. Show that the points X and Y lie on the line AC.

11. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1999} + \left(\frac{b}{c}\right)^{1999} + \left(\frac{c}{d}\right)^{1999} + \left(\frac{d}{a}\right)^{1999} \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$