Серия 5. Аддитивная комбинаторика. Добавка

1. Дано $n-1$ целое число от 0 до $n-1$, не все из которых равны. Докажите, что сумма нескольких из них делится на n.

2. Петя выбрал 100 натуральных чисел, меньших 100 так, что их сумма равна 200. Докажите, что сумма нескольких из них равна 100.

3. а) Дано простое число p. Выбрали $2k-1$ число ($k \leqslant p$), среди которых нет $k+1$ одинаковых, и посчитали остаток суммы любых k из них при делении на p. Докажите, что получилось не меньше k различных остатков.

б) Получите отсюда *Теорему Эрдеша-Гинзбурга-Зива*: Докажите, что из $2n-1$ целого числа всегда можно выбрать n чисел с суммой, кратной n.

4. Дано множество S, состоящее из n натуральных чисел. Для $k \leqslant n$ рассмотрим всевозможные суммы вида $x_1+\ldots+x_k$, где x_i — различные элементы из S. Докажите, что количество различных значений сумм, состоящих из не более, чем k слагаемых, не может быть меньше, чем $k(n-k)+1$.

---

5. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

6. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

7. На стороне AC теругольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.