# Серия 7. Ищем многочлены.

**1.** Найдите все такие пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, что $P(x)Q(x) = P(Q(x))$ при любых действительных $x$.

**2.** Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2)$$

при любых действительных $x$.

**3.** Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что многочлен

$$(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$$

является константой.

**4.** Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(P(n) + n)$$

является простым числом для бесконечного количества натуральных $n$.

**5.** Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $2^n - 1$ делится на $P(n)$ при всех натуральных $n$.

**6.** Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что для них существует некоторый многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами такой, что для всех натуральных $n$ выполнено равенство

$$P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = P(n)Q(n)$$

---

**7.** Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате $2 \times 2$ одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких $n$ за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

**8.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AD$, $BE$ и $CF$, пересекающиеся в точке $I$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ пересекает прямые $BE$ и $CF$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $I$, $M$ и $N$ лежат на одной окружности.

**9.** Даны натуральные числа $a$, $b$, $c$, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное $n$, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на $2^n$ ни при одном натуральном $k$?