

Серия 25. Выпуклые оболочки

Определение. Фигура называется *выпуклой*, если для любых двух её точек отрезок, соединяющий эти точки, целиком принадлежит фигуре.

Определение. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее данную фигуру (в качестве фигуры может выступать конечное множество точек).

1. При каком наибольшем n на плоскости можно отметить n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой так, чтобы любая незамкнутая ломаная, проходящая через каждую из этих точек ровно по 1 разу, была несамопересекающейся?
2. На плоскости дано $n \geq 4$ точек. Известно, что любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти n точек являются вершинами выпуклого n -угольника.
3. Докажите, что из любых шести точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать такие три, что у треугольника с вершинами в этих точках один из углов не больше 30° .
4. На плоскости дано несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.
5. На плоскости дано $n \geq 4$ точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что если для любых трех из них найдется четвертая (тоже из данных), с которой они образуют вершины параллелограмма, то $n = 4$.
6. На плоскости даны $3n - 1$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.
7. Найдите наименьшее n , что из любых n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 5, являющихся вершинами выпуклого пятиугольника.

Рубрика “Намедни”.

6-7(уже была в этой рубрике, но ещё не разбирали). В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или паромом. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать k городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих k городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

15-5. Положительные числа a, b, c, d таковы, что

$$abcd = 1 \quad \text{и} \quad a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Докажите, что

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$