ЦПМ. Группа 10-2 **04.10.2018**

Серия 6. Интересное тождество

!

0. Докажите, что для произвольнух действительных a, b, c имеет место тождество

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$$

Выведите и запомните, к чему сводится это тождество, если $abc = 1$; $ab + bc + ca = 1$.

1. Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

2. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Докажите, что

$$ab+bc+ca \leqslant \frac{3}{4}$$

3. Пусть a, b, c — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2(1+a+b+c).$$

4. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \geqslant abc + \sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}.$$

5. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 4(a+b+c-1).$$

6. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то после замены $a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $b = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $c = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ получается $ab+bc+ca = 1$.

7. Докажите, что для углов треугольника выполнены неравенства

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$.

8. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$abc(a+b+c) \leqslant \frac{3((a+b)(b+c)(c+a))^{4/3}}{16}.$$

9. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}.$$