Серия 8. Циклические неравенства

!

1. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

2. Пусть $n > 3$; $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$; $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1$$

3. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

4. Пусть a, b, c, d — положительные числа такие, что $abcd = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geqslant 2.$$

5. Пусть $n > 3$; $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$; $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{x_1^2+x_1x_2} + \frac{1}{x_2^2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n^2+x_nx_1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

6. Пусть a, b, c, d, e — положительные числа такие, что $abcde = 1$. Докажите, что

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd} + \frac{b+bcd}{1+bc+bcde} + \frac{c+cde}{1+cd+cdea} + \frac{d+dea}{1+de+deab} + \frac{e+eab}{1+ea+eabc} \geqslant \frac{10}{3}.$$