ЦПМ. Группа 10-2 **29.11.2018**

Multa paucis

Серия 18. Многоугольники

1. Дан пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами, причём $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \angle D \geqslant \angle E$. Докажите, что пятиугольник правильный.

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ треугольники ABC и CDE равносторонние, точка O — центр треугольника ABC; M, N — середины BD, AE соответственно. Докажите, что $\triangle OME \sim \triangle OND$.

3. На сторонах треугольника ABC выбраны точки A_1, A_2 на стороне BC; B_1, B_2 на стороне CA; C_1, C_2 на стороне AB так, что выпуклый шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ является равносторонним. Докажите, что отрезки A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что если в описанном шестиугольнике верно $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что площадь треугольника ACE не больше площади треугольника BDF.

5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Пусть R_A, R_C, R_E — радиусы описанных окружностей около треугольников FAB, BCD, DEF соответственно, P — периметр шестиугольника. Докажите, что $R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}$.

6. Четыре последовательных вершины A, B, C, D правильного многоугольника таковы, что

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Определите число сторон многоугольника.

7. В выпуклом восьмиугольнике все углы равны, а отношение всех пар последовательных сторон рационально. Докажите, что все пары противоположных сторон равны.

8. Докажите, что существует 1992-угольник такой, что

а) длины сторон в некотором порядке равны 1, 2, 3, ..., 1991, 1992;

б) многоугольник вписанный.

ЦПМ. Группа 10-2 **29.11.2018**

Multa paucis

Серия 18. Многоугольники

1. Дан пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами, причём $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \angle D \geqslant \angle E$. Докажите, что пятиугольник правильный.

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ треугольники ABC и CDE равносторонние, точка O — центр треугольника ABC; M, N — середины BD, AE соответственно. Докажите, что $\triangle OME \sim \triangle OND$.

3. На сторонах треугольника ABC выбраны точки A_1, A_2 на стороне BC; B_1, B_2 на стороне CA; C_1, C_2 на стороне AB так, что выпуклый шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ является равносторонним. Докажите, что отрезки A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что если в описанном шестиугольнике верно $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что площадь треугольника ACE не больше площади треугольника BDF.

5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Пусть R_A, R_C, R_E — радиусы описанных окружностей около треугольников FAB, BCD, DEF соответственно, P — периметр шестиугольника. Докажите, что $R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}$.

6. Четыре последовательных вершины A, B, C, D правильного многоугольника таковы, что

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Определите число сторон многоугольника.

7. В выпуклом восьмиугольнике все углы равны, а отношение всех пар последовательных сторон рационально. Докажите, что все пары противоположных сторон равны.

8. Докажите, что существует 1992-угольник такой, что

а) длины сторон в некотором порядке равны 1, 2, 3, ..., 1991, 1992;

б) многоугольник вписанный.