

Олимпиада от 15 апреля. Всеросс близко!

1. Расстоянием между числами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i , для которого $a_i \neq b_i$. Все пятизначные числа выписаны друг за другом в некотором порядке. Какова при этом минимально возможная сумма расстояний между соседними числами?
2. Серёжа выбрал два различных натуральных числа a и b . Он записал в тетрадь четыре числа: a , $a + 2$, b и $b + 2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске?
3. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый – в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6000 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)
4. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; M – середина стороны AB . В описанной окружности Ω треугольника ABC , проведён диаметр CC' . Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Перпендикуляр к прямой AC' , проведённый через точку K , перпендикуляр к прямой BC' , проведённый через точку L , и прямая AB образуют треугольник Δ . Докажите, что описанная окружность ω треугольника Δ касается окружности Ω .

Замены. Если вдруг задачи первого типа для вас не новы.

Примечание. Задачи из верхнего списка прямо с прошлых лет всероссийской олимпиады, из альтернативного списка – из других источников. Не обманывайте сами себя, замену лучше использовать лишь как вынужденную меру.

- 1-2. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z , что $1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$, $1 + y^4 \leq 2(z - x)^2$, $1 + z^4 \leq 2(x - y)^2$.
- 2-2. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию “Салют”. Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей “Прогресс”, каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они могут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.
- 3-2. На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждение фильма, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Секции из одного человека разрешаются: он пишет отзыв о виденном фильме.)
- 4-2. Точка K – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC . Точка I – центр его вписанной окружности S . Прямая KI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке T . Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BC , BT и CT будет касаться окружности, симметричной S относительно BC .