

Серия 29. Инверсия

Inversio — (лат.) переворачивание; перестановка.

Инверсией относительно данной окружности с центром в точке O радиуса R преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = R^2 \frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|^2}$.

С1. Прямая, проходящая через O , переходит в себя.

С2. Прямая ℓ , не проходящая через O , переходит в окружность S , проходящую через O .

С3. точка O' , симметричная O относительно ℓ , переходит в центр окружности S .

С4. обратно, окружность S , проходящая через O переходит в прямую ℓ .

С5. Окружность, не проходящая через O , переходит в окружность, не проходящую через O . Их центры лежат на одном луче с началом в O (но центр не переходит в центр!).

30. Если A' и B' — образы точек A и B , то $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot R^2}{|OA| \cdot |OB|}$.

31. Пусть инверсия с центром O переводит окружность S в S' . Докажите, что точка O — центр гомотетии, переводящей S в S' .

32. Точки A , B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP , BSP , CAP и точка P лежат на одной окружности.

33. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Прямая, отличная от AB , пересекает окружность ω_1 в точках C и D , окружность ω_2 в точках E и F , а прямую AB — в точке P , лежащей на отрезке AB . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников ACE и BDF , проходит через точку P .

34. При помощи циркуля и линейки постройте окружность,

- а) проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности;
- б) проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей;
- в) касающуюся трех данных окружностей.

35. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

36. Треугольник ABC вписан в окружность ω . Переменная прямая, параллельная BC , пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно и пересекает ω в точках K и L (где D лежит между K и E). Окружность γ_1 касается отрезков KD , BD и окружности ω ; окружность γ_2 касается отрезков LE , CE и окружности ω . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внутренних касательных к окружностям γ_1 и γ_2 .