11 класс   Отборочная олимпиада   10 сентября 2018

1. Решите систему уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1\,, \\ (x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2\,. \end{cases}$$

2. Окружность ω с центром O и окружность γ пересекаются в точках A и B. На окружности ω внутри окружности γ отмечена точка C, а прямые AC и BC вторично пересекают окружность γ в точках D и E соответственно. Докажите, что $OC \perp DE$.

3. В Мехико для каждой частной автомашины устанавливается один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из десяти человек подкупила полицию, и для каждой машины они называют два дня, один из которых полиция выбирает в качестве невыездного дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение невыездных дней для автомобилей идёт последовательно?

4. Пусть k — натуральное число, и $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ — все положительные делители числа $4k$. Докажите, что существует $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$.

5. Пусть H — точка пересечения высот AA' и BB' остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная AB, пересекает эти высоты в точках D и E, а сторону AB — в точке P. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на отрезке CP.

6. Петя и Вася играют в следующую игру. Вася заполняет числами от 1 до 10000 клетки таблицы 100×100 (каждое — по одному разу). Петя хочет пройти шахматным королём от левого края доски до правого. При этом если он ставит короля на какую-то клетку, то он обязан заплатить Васе такое число рублей, которое на ней написано. Сколько Петя заплатит Васе при правильной игре? (Петя хочет заплатить как можно меньше, Вася — получить как можно больше.)

11 класс   Отборочная олимпиада   10 сентября 2018

1. Решите систему уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1\,, \\ (x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2\,. \end{cases}$$

2. Окружность ω с центром O и окружность γ пересекаются в точках A и B. На окружности ω внутри окружности γ отмечена точка C, а прямые AC и BC вторично пересекают окружность γ в точках D и E соответственно. Докажите, что $OC \perp DE$.

3. В Мехико для каждой частной автомашины устанавливается один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из десяти человек подкупила полицию, и для каждой машины они называют два дня, один из которых полиция выбирает в качестве невыездного дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение невыездных дней для автомобилей идёт последовательно?

4. Пусть k — натуральное число, и $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ — все положительные делители числа $4k$. Докажите, что существует $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$.

5. Пусть H — точка пересечения высот AA' и BB' остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная AB, пересекает эти высоты в точках D и E, а сторону AB — в точке P. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на отрезке CP.

6. Петя и Вася играют в следующую игру. Вася заполняет числами от 1 до 10000 клетки таблицы 100×100 (каждое — по одному разу). Петя хочет пройти шахматным королём от левого края доски до правого. При этом если он ставит короля на какую-то клетку, то он обязан заплатить Васе такое число рублей, которое на ней написано. Сколько Петя заплатит Васе при правильной игре? (Петя хочет заплатить как можно меньше, Вася — получить как можно больше.)