11 класс	Линейные пространства	20 – 24 сентября 2018

Определение. Пусть даны множества "векторов" V и поле "чисел" K, при этом есть операции сложения векторов и умножения векторов на число, удовлетворяющие следующим свойствам:

- Сложение векторов коммутативно, ассоциативно и в множестве есть нейтральный элемент (нулевой вектор) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть противоположный по сложению $-\overrightarrow{v}$;
- $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$, $k_1(k_2\overrightarrow{v}) = (k_1k_2)\overrightarrow{v}$ при $k_1, k_2 \in K, \overrightarrow{v} \in V$;
- $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$, $k(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = k\overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2}$.

Тогда V называется *векторным (линейным) пространством* над полем K.

Примеры векторных пространств:

- Множество векторов на плоскости;
- Множество строк длины n из элементов K (K^n);
- Множество многочленов над полем K;
- Множество функций из K в K над полем K.

1. Являются ли следующие множества векторными пространствами (относительно естественных операций):

(a) решения произвольной СЛУ от n переменных;
(b) решения однородной СЛУ от n переменных (состоящей из уравнений вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$);
(c) многочлены над данным полем, имеющие фиксированный корень α;
(d) многочлены степени ровно 2018;
(e) многочлены степени не выше 1000000;
(f) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);
(g) строки длины n с нулевой суммой (над K);
(h) $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$;
(i) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}$;
(j) функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ (над $\mathbb{Q}$);
(k) функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ (над $\mathbb{R}$);
(l) функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (над $\mathbb{Q}$)?

2. Пусть $F_1 \subset F_2$ — поля. Докажите, что F_2 является векторным пространством над F_1.

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *подпространством*, если оно само является векторным пространством относительно операций, индуцированных с V.

3. Найдите все подпространства у пространств решений однородной СЛУ и пространства строк длины n.

Определение. *Линейной комбинацией* множества векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ будем называть выражение (или его значение, в зависимости от контекста) вида $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n$. Будем говорить, что векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *линейно независимы*, если условие $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n = 0$ равносильно $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Определение. Пусть S — произвольное подмножество векторов из V. *Линейной оболочкой* множества S будем называть множество всех векторов, которые являются линейной комбинацией конечного числа векторов из S, и обозначать ее через $\langle S\rangle$.

4. Докажите, что для произвольного подмножества $S \subset V$ множество $\langle S\rangle$ является подпространством в V. Докажите, что любое подпространство V, содержащее целиком множество S содержит и $\langle S\rangle$.

Определение. Множество S называется *базисом* пространства V, если любой элемент V единственным образом представим в виде линейной комбинации элементов из S.

5. Приведите пример базисов в пространствах из пунктов 1c,e,g.

6. Пусть $f(x)$ — многочлен степени 10. Докажите, что $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(10)}(x)$ — базис пространства многочленов степени не выше 10.

7. Докажите, что данные определения равносильны определению базиса пространства V:

(a) Минимальное по включению множество векторов из V, линейная оболочка которых совпадает с пространством V.

(b) Максимальное по включению множество линейно независимых векторов из V.

(c) Множество линейно независимых векторов из V, линейная оболочка которых совпадает с V.

8. Пусть S_1, S_2 — базисы пространства V, причем S_1 содержит n векторов. Докажите, что S_2 также конечное множество и тоже содержит n векторов.

Определение. Количество элементов в базисе пространства V будем называть *размерностью* пространства V и обозначать $\dim V$.

9. Пусть V — конечномерное пространство.

(a) Докажите, что любое множество линейно независимых векторов V можно дополнить до базиса.

(b) Докажите, что из любого конечного множества векторов, линейная оболочка которых совпадает с V, можно выбрать базис.

10. Пусть дана СЛУ из n уравнений от n переменных. Докажите, что она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда левые части уравнений линейно независимы.

Определение. *Строчным рангом* матрицы будем называть максимальное количество линейно независимых строк. *Столбцовым рангом* будем называть максимальное количество линейно независимых столбцов матрицы.

11. **(a)** Пусть в матрице M некоторый столбец C является линейной комбинацией других столбцов матрицы, а $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — некоторый линейно независимый набор строк. Докажите, что строки $r_1, \ldots, r_n$ линейно независимы и в матрице $M \backslash C$.

(b) Докажите, что строчный ранг матрицы равен столбцовому рангу матрицы.

Определение. *Определителем* матрицы $A = \{a_{ij}\}$ размера $n \times n$ называется сумма по всем перестановкам σ на множестве из n элементов выражений $(-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$, где $(-1)^\sigma$ равно 1, если σ — четная перестановка, и (-1) иначе. Обозначать определитель матрицы будем через $\det A$.

12. Докажите, что определитель — полилинейная функция от строк матрицы (т.е. линейная функция от каждой строки матрицы, если остальные строки фиксированы).

13. **(a)** Докажите, что если в матрице есть две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.

(b) Докажите, что при прибавлении к одной из строк матрицы другой строки, умноженной на число, определитель не меняется.

(c) Докажите, что определитель матрицы равен 0 тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы.

14. **Метод Крамера.** Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}.$$

Определим матрицу $A = \{a_{ij}\}$. При $i = 1, \ldots, n$ определим матрицу C_i как матрицу A, в которой i-ый столбец заменен на столбец из c_k. Докажите, что если $\det A \neq 0$, то $x_i = \frac{\det C_i}{\det A}$ — решение данной системы.