11 класс **О числах** 1 октября 2018

1. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов с десятичной записью вида $\overline{NN}$.

2. Найдите все натуральные k такие, что $5^k - 1$ является произведением чётного количества последовательных натуральных чисел.

3. Найдите все натуральные a и b такие, что $a^2 + b \,\vdots\, b^2 + a$, причём число $b^2 + a$ является степенью некоторого простого числа.

4. Пусть A — бесконечное подмножество натуральных чисел. Найдите все натуральные n такие, что для всех $a \in A$ справедливо

$$a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1 \;\vdots\; a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1.$$

5. Дано натуральное $m > 1$, $A = \{m+1, 3m+2, 5m+3, 7m+4, \ldots\}$. Докажите, что существует натуральное $a < m$ такое, что хотя бы одно из чисел 2^a, $2^a + 1$ лежит в множестве A.

6. Докажите, что число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ представимо в виде произведения двух натуральных чисел, больших 10^{1000}.

7. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Натуральное $N > 1$ таково, что число $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ — целое при всех $n \geqslant N$. Докажите, что эта последовательность стабилизируется (т.е. найдётся натуральное M такое, что $a_m = a_{m+1}$ при всех $m \geqslant M$).

8. Пусть k и n — натуральные числа. Докажите, что числа k и n взаимно просты тогда и только тогда, когда можно выбрать натуральные $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_n$ так, что все числа вида $f_i g_j$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots n$) дают разные остатки при делении на kn.

11 класс **О числах** 1 октября 2018

1. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов с десятичной записью вида $\overline{NN}$.

2. Найдите все натуральные k такие, что $5^k - 1$ является произведением чётного количества последовательных натуральных чисел.

3. Найдите все натуральные a и b такие, что $a^2 + b \,\vdots\, b^2 + a$, причём число $b^2 + a$ является степенью некоторого простого числа.

4. Пусть A — бесконечное подмножество натуральных чисел. Найдите все натуральные n такие, что для всех $a \in A$ справедливо

$$a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1 \;\vdots\; a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1.$$

5. Дано натуральное $m > 1$, $A = \{m+1, 3m+2, 5m+3, 7m+4, \ldots\}$. Докажите, что существует натуральное $a < m$ такое, что хотя бы одно из чисел 2^a, $2^a + 1$ лежит в множестве A.

6. Докажите, что число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ представимо в виде произведения двух натуральных чисел, больших 10^{1000}.

7. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Натуральное $N > 1$ таково, что число $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ — целое при всех $n \geqslant N$. Докажите, что эта последовательность стабилизируется (т.е. найдётся натуральное M такое, что $a_m = a_{m+1}$ при всех $m \geqslant M$).

8. Пусть k и n — натуральные числа. Докажите, что числа k и n взаимно просты тогда и только тогда, когда можно выбрать натуральные $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_n$ так, что все числа вида $f_i g_j$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots n$) дают разные остатки при делении на kn.