11 класс **Письменные задачи** 8 октября 2018

1. В клетчатом квадрате $n \times n$ две противоположные угловые клетки — чёрные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в чёрный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать чёрными все клетки этого квадрата?

2. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Описанные окружности треугольников AHC_1 и CHA_1 вторично пересекаются в точке $M \neq H$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBB_1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + xz + yz = 1, \\ 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}). \end{cases}$

4. По кругу выписаны n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_n$). За один ход разрешается выбрать целое число $0 \leqslant s < n$ и заменить все числа по правилу $a'_i = a_i - a_{s+i}$, где a'_i — новое значение a_i. Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра s на каждом ходу (на разных ходах параметр s может быть разным), рано или поздно все числа a_i станут кратными n, если

а) n — простое число; **б)** n — степень простого числа.

11 класс **Письменные задачи** 8 октября 2018

1. В клетчатом квадрате $n \times n$ две противоположные угловые клетки — чёрные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в чёрный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать чёрными все клетки этого квадрата?

2. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Описанные окружности треугольников AHC_1 и CHA_1 вторично пересекаются в точке $M \neq H$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBB_1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + xz + yz = 1, \\ 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}). \end{cases}$

4. По кругу выписаны n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_n$). За один ход разрешается выбрать целое число $0 \leqslant s < n$ и заменить все числа по правилу $a'_i = a_i - a_{s+i}$, где a'_i — новое значение a_i. Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра s на каждом ходу (на разных ходах параметр s может быть разным), рано или поздно все числа a_i станут кратными n, если

а) n — простое число; **б)** n — степень простого числа.

11 класс **Письменные задачи** 8 октября 2018

1. В клетчатом квадрате $n \times n$ две противоположные угловые клетки — чёрные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в чёрный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать чёрными все клетки этого квадрата?

2. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Описанные окружности треугольников AHC_1 и CHA_1 вторично пересекаются в точке $M \neq H$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBB_1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + xz + yz = 1, \\ 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}). \end{cases}$

4. По кругу выписаны n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_n$). За один ход разрешается выбрать целое число $0 \leqslant s < n$ и заменить все числа по правилу $a'_i = a_i - a_{s+i}$, где a'_i — новое значение a_i. Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра s на каждом ходу (на разных ходах параметр s может быть разным), рано или поздно все числа a_i станут кратными n, если

а) n — простое число; **б)** n — степень простого числа.

11 класс **Письменные задачи** 8 октября 2018

1. В клетчатом квадрате $n \times n$ две противоположные угловые клетки — чёрные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в чёрный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать чёрными все клетки этого квадрата?

2. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Описанные окружности треугольников AHC_1 и CHA_1 вторично пересекаются в точке $M \neq H$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBB_1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + xz + yz = 1, \\ 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}). \end{cases}$

4. По кругу выписаны n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_n$). За один ход разрешается выбрать целое число $0 \leqslant s < n$ и заменить все числа по правилу $a'_i = a_i - a_{s+i}$, где a'_i — новое значение a_i. Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра s на каждом ходу (на разных ходах параметр s может быть разным), рано или поздно все числа a_i станут кратными n, если

а) n — простое число; **б)** n — степень простого числа.