11 класс **Всё сложится** 25 октября 2018

1. Найдите сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(3^n x)}{3^n}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+2}}$ (где F_i — числа Фибоначчи);

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}$ (где F_i — числа Фибоначчи); **ё)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ (где a_i — количество цифр в числе 2^i, больших 4).

2. Найдите сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ (где $|x|<1$) ; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ (где $x\neq 2\pi s, s\in\mathbb{Z}$) ; **ё)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

3. Докажите, что

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$;

в) $2(\sqrt{n+1}-1)<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<100$ (где a_i — i-е по счёту натуральное число, не содержащее единиц в десятичной записи);

д) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{2^k-1}<2$ (где $\varphi(s)$ — функция Эйлера).

11 класс **Всё сложится** 25 октября 2018

1. Найдите сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(3^n x)}{3^n}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+2}}$ (где F_i — числа Фибоначчи);

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}$ (где F_i — числа Фибоначчи); **ё)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ (где a_i — количество цифр в числе 2^i, больших 4).

2. Найдите сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ (где $|x|<1$) ; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ (где $x\neq 2\pi s, s\in\mathbb{Z}$) ; **ё)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

3. Докажите, что

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$;

в) $2(\sqrt{n+1}-1)<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<100$ (где a_i — i-е по счёту натуральное число, не содержащее единиц в десятичной записи);

д) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{2^k-1}<2$ (где $\varphi(s)$ — функция Эйлера).