11 класс | **Случайные блуждания** | 29 октября 2018

**Определение.** Будем называть ломаную $A_0A_1\dots A_n$ на координатной плоскости *траекторией случайного блуждания*, если $A_0=(m,k)$, где $m$, $k$ — целые, и, если $A_i=(x,y)$, то $A_{i+1}=(x+1,y+1)$ или $A_{i+1}=(x+1,y-1)$. Назовем траекторию *правильной*, если $A_0=(0,0)$. Число $n$ будем называть *длиной* траектории, число $A_0$ — *началом*, а $A_n$ — *концом*.

**Определение.** Пусть ломаная $A_0A_1\dots A_n$ является траекторией случайного блуждания, $A_i=(x_i,y_i)$. Тогда *уровнем* этой траектории будем называть число

$$L(A_0A_1\dots A_n)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_0).$$

**0.** Сколько существует правильных траекторий длины $n$?

**1.** Среди всех правильных траекторий длины $n$ найдите долю $p(n,k)$ правильных траекторий с концом $(n,k)$.

**2. Принцип отражения.** Пусть $a,b$ — натуральные числа. Докажите, что количество траекторий из точки $(0,-a)$ в точку $(n,b)$ равно количеству траекторий из точки $(0,a)$ в точку $(n,b)$, пересекающих ось абсцисс.

**3. а)** Пусть $T(n,k)$ — доля правильных траекторий длины $n$ с концом в точке $(n,k)$, пересекающих прямую $y=k$ только в конце траектории, среди всех правильных траекторий длины $n$. Докажите, что $T(n,k)=\frac{p(n-1,k-1)-p(n-1,k+1)}{2}$.

**б)** Найдите $T(2n,2k)$.

**4. а)** Найдите количество правильных траекторий длины $n$, заканчивающихся в точке $(n,k)$ и имеющих уровень не меньше $m$.

**б)** Найдите количество правильных траекторий длины $n$, заканчивающихся в точке $(n,k)$ и имеющих уровень ровно $m$.

**в)** Найдите количество правильных траекторий длины $n$, имеющих уровень $m$.

**5.** Бар и дом пьяницы находятся на одной улице в 11 кварталах друг от друга. Пьяница ходит между домом и баром вдоль улицы от перекрестка к перекрестку. Он проходит один квартал, после чего равновероятно выбирает, пойти дальше на один квартал или вернуться назад. Когда он доходит до дома, он ложится спать и никуда дальше не идет. Изначально пьяница находится в пяти кварталах от дома и в шести от бара. С какой вероятностью он доберется до бара?

**6.** В центре стола длиной 100 сантиметров находится заводной апельсин. Каждую минуту апельсин двигается на 10 сантиметров, с вероятностью 0.3 влево, а с вероятностью 0.7 вправо. Оказавшись на краю стола, апельсин падает. Какова вероятность, что он упадет с правого края стола?

**7. а)** Человек приходит в казино имея $s$ долларов и играет в рулетку. С вероятностью $p$ он выигрывает игру и получает 1 доллар, а с вероятностью $q=1-p$ он проигрывает и теряет 1 доллар. Он играет до тех пор, пока у него есть деньги и их меньше, чем $S$ долларов. С какой вероятностью он уйдет с деньгами?

**б)** Пусть теперь игрок уходит домой, только когда он разорится. Докажите, что при $p\leqslant 1/2$ он почти наверняка рано или поздно разорится.


11 класс | **Случайные блуждания** | 29 октября 2018

**Определение.** Будем называть ломаную $A_0A_1\dots A_n$ на координатной плоскости *траекторией случайного блуждания*, если $A_0=(m,k)$, где $m$, $k$ — целые, и, если $A_i=(x,y)$, то $A_{i+1}=(x+1,y+1)$ или $A_{i+1}=(x+1,y-1)$. Назовем траекторию *правильной*, если $A_0=(0,0)$. Число $n$ будем называть *длиной* траектории, число $A_0$ — *началом*, а $A_n$ — *концом*.

**Определение.** Пусть ломаная $A_0A_1\dots A_n$ является траекторией случайного блуждания, $A_i=(x_i,y_i)$. Тогда *уровнем* этой траектории будем называть число

$$L(A_0A_1\dots A_n)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_0).$$

**0.** Сколько существует правильных траекторий длины $n$?

**1.** Среди всех правильных траекторий длины $n$ найдите долю $p(n,k)$ правильных траекторий с концом $(n,k)$.

**2. Принцип отражения.** Пусть $a,b$ — натуральные числа. Докажите, что количество траекторий из точки $(0,-a)$ в точку $(n,b)$ равно количеству траекторий из точки $(0,a)$ в точку $(n,b)$, пересекающих ось абсцисс.

**3. а)** Пусть $T(n,k)$ — доля правильных траекторий длины $n$ с концом в точке $(n,k)$, пересекающих прямую $y=k$ только в конце траектории, среди всех правильных траекторий длины $n$. Докажите, что $T(n,k)=\frac{p(n-1,k-1)-p(n-1,k+1)}{2}$.

**б)** Найдите $T(2n,2k)$.

**4. а)** Найдите количество правильных траекторий длины $n$, заканчивающихся в точке $(n,k)$ и имеющих уровень не меньше $m$.

**б)** Найдите количество правильных траекторий длины $n$, заканчивающихся в точке $(n,k)$ и имеющих уровень ровно $m$.

**в)** Найдите количество правильных траекторий длины $n$, имеющих уровень $m$.

**5.** Бар и дом пьяницы находятся на одной улице в 11 кварталах друг от друга. Пьяница ходит между домом и баром вдоль улицы от перекрестка к перекрестку. Он проходит один квартал, после чего равновероятно выбирает, пойти дальше на один квартал или вернуться назад. Когда он доходит до дома, он ложится спать и никуда дальше не идет. Изначально пьяница находится в пяти кварталах от дома и в шести от бара. С какой вероятностью он доберется до бара?

**6.** В центре стола длиной 100 сантиметров находится заводной апельсин. Каждую минуту апельсин двигается на 10 сантиметров, с вероятностью 0.3 влево, а с вероятностью 0.7 вправо. Оказавшись на краю стола, апельсин падает. Какова вероятность, что он упадет с правого края стола?

**7. а)** Человек приходит в казино имея $s$ долларов и играет в рулетку. С вероятностью $p$ он выигрывает игру и получает 1 доллар, а с вероятностью $q=1-p$ он проигрывает и теряет 1 доллар. Он играет до тех пор, пока у него есть деньги и их меньше, чем $S$ долларов. С какой вероятностью он уйдет с деньгами?

**б)** Пусть теперь игрок уходит домой, только когда он разорится. Докажите, что при $p\leqslant 1/2$ он почти наверняка рано или поздно разорится.