11 класс — **Разнобой** — 1 ноября 2018

1. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

2. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i. Пусть $S = \sum \frac{1}{d_i}$.

а) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.

б) Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leqslant 1$, причём иногда неравенство строгое.

3. Докажите, что для некоторого натурального n число $2^n + 2017$ имеет хотя бы 2017 различных простых делителей.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1. Продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

5. $2n$ школьников перез поездкой на сборы проходили психологический тест, состоящий из $2k$ вопросов, на каждый из которых можно было ответить только «да» или «нет». На каждую пару вопросов ровно половина всех школьников ответила одинаково (либо оба ответа «да», либо оба — «нет»). Назовём человека *психически уравновешенным*, если он ответил «да» ровно на половину вопросов, и *психически неуравновешенным* иначе. Докажите, что психически неуравновешенных людей на сборах не менее $\frac{n}{k}$.

6. Найдутся ли на плоскости 4 точки, все попарные расстояния между которыми — нечётные числа?

7. По кругу лежат 6000 шариков десяти цветов. Оказалось, что среди любых ста подряд идущих шариков найдутся шарики всех цветов. При каком наименьшем k можно гарантированно найти k подряд идущих шариков, среди которых есть шарики всех цветов?

11 класс — **Разнобой** — 1 ноября 2018

1. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

2. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i. Пусть $S = \sum \frac{1}{d_i}$.

а) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.

б) Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leqslant 1$, причём иногда неравенство строгое.

3. Докажите, что для некоторого натурального n число $2^n + 2017$ имеет хотя бы 2017 различных простых делителей.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1. Продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

5. $2n$ школьников перез поездкой на сборы проходили психологический тест, состоящий из $2k$ вопросов, на каждый из которых можно было ответить только «да» или «нет». На каждую пару вопросов ровно половина всех школьников ответила одинаково (либо оба ответа «да», либо оба — «нет»). Назовём человека *психически уравновешенным*, если он ответил «да» ровно на половину вопросов, и *психически неуравновешенным* иначе. Докажите, что психически неуравновешенных людей на сборах не менее $\frac{n}{k}$.

6. Найдутся ли на плоскости 4 точки, все попарные расстояния между которыми — нечётные числа?

7. По кругу лежат 6000 шариков десяти цветов. Оказалось, что среди любых ста подряд идущих шариков найдутся шарики всех цветов. При каком наименьшем k можно гарантированно найти k подряд идущих шариков, среди которых есть шарики всех цветов?