11 класс **Линейная комбинаторика** 22 ноября 2018

1. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять любое число к каждой клетке любого квадрата 3×3 или 4×4. Все ли расстановки чисел можно получить?

2. Есть доска 2018×2018 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединении строки и столбца). За какое минимальное число операций можно включить всю доску?

3. Даны непустые подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что можно выбрать два непересекающихся подмножества индексов I, J такие, что

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

4. Рассмотрим граф G, выделим в нём вершины u и v. На каждом ребре e введём положительное сопротивление $r(e)$. Рассмотрим единичный поток в сети с истоком u и стоком v (считаем, что у каждого ребра пропускная способность 1 в обе стороны, между несмежными вершинами пропускная способность равна 0). В дополнение к обычным условиям на поток, потребуем ещё одно **правило Кирхгофа:** для любого цикла с рёбрами $e_1, \ldots e_n$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot r(e_k) = 0.$$

(a) Докажите, что существует единственный поток, удовлетворяющий данным условиям.

(b) Выразите поток на ребре e_k через сопротивления.

5. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

6. Имеется n лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель подключён к нескольким лампочкам и при переключении меняет состояние всех подключённых к нему лампочек. Оказалось, что для любого непустого подмножества лампочек есть выключатель, который меняет состояние нечётного числа из этих лампочек. Докажите, что все лампочки можно одновременно включить.

7. Прямоугольник разрезан на квадраты. Докажите, что отношение сторон прямоугольника рационально.

8. У Васи есть строка $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ из p остатков по модулю p ($p > 2$ — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток a и заменить одновременно все элементы x_i строки по правилу $x'_i = x_i - x_{i+a}$. Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр a на каждом ходу?

11 класс **Линейная комбинаторика** 22 ноября 2018

1. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять любое число к каждой клетке любого квадрата 3×3 или 4×4. Все ли расстановки чисел можно получить?

2. Есть доска 2018×2018 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединении строки и столбца). За какое минимальное число операций можно включить всю доску?

3. Даны непустые подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что можно выбрать два непересекающихся подмножества индексов I, J такие, что

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

4. Рассмотрим граф G, выделим в нём вершины u и v. На каждом ребре e введём положительное сопротивление $r(e)$. Рассмотрим единичный поток в сети с истоком u и стоком v (считаем, что у каждого ребра пропускная способность 1 в обе стороны, между несмежными вершинами пропускная способность равна 0). В дополнение к обычным условиям на поток, потребуем ещё одно **правило Кирхгофа:** для любого цикла с рёбрами $e_1, \ldots e_n$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot r(e_k) = 0.$$

(a) Докажите, что существует единственный поток, удовлетворяющий данным условиям.

(b) Выразите поток на ребре e_k через сопротивления.

5. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

6. Имеется n лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель подключён к нескольким лампочкам и при переключении меняет состояние всех подключённых к нему лампочек. Оказалось, что для любого непустого подмножества лампочек есть выключатель, который меняет состояние нечётного числа из этих лампочек. Докажите, что все лампочки можно одновременно включить.

7. Прямоугольник разрезан на квадраты. Докажите, что отношение сторон прямоугольника рационально.

8. У Васи есть строка $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ из p остатков по модулю p ($p > 2$ — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток a и заменить одновременно все элементы x_i строки по правилу $x'_i = x_i - x_{i+a}$. Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр a на каждом ходу?