11 класс

Теорема Кронекера

13 декабря 2018

1. а) По окружности длины 1 по часовой стрелке прыгает кузнечик прыжками постоянной иррациональной длины α. В некотором месте на этой окружности вырыта ямка длины ε. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в ямку.

б) Оцените сверху количество прыжков, которое потребуется кузнечику для повторного попадания в ямку, если точка старта находится в центре ямки.

2. Пусть, как и в предыдущей задаче, кузнечик прыгает по окружности с иррациональным шагом α и где-то на окружности есть ямка размера ε. Пусть за n прыжков кузнечик попал в ямку $k(n)$ раз. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=\varepsilon$.

3. Через два узла клетчатой бумаги проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе лежит бесконечно много узлов сетки.

Непрерывная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 ползают n улиток $k_1,\ldots,k_n$ со скоростями $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Докажите, что если числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ существует момент, когда все улитки попадут в свои ямки.

Дискретная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 прыгают n кузнечиков $k_1,\ldots,k_n$ с длинами прыжков $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Докажите, что если числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ существует момент, когда все кузнечики попадут в свои ямки.

4. а) Из непрерывной теоремы Кронекера для n улиток выведите дискретную теорему Кронекера для n кузнечиков.

б) Из дискретной теоремы Кронекера для n кузнечиков выведите непрерывную теорему Кронекера для $n+1$ улитки.

5. Напомним, что n-мерный тор — это декартово произведение n окружностей, или же n-мерный куб, в котором точки с координатами вида $(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$ склеены соответственно с точками $(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$. Тогда в условии теоремы Кронекера n кузнечиков/улиток, двигающихся по окружности, можно заменить на одного кузнечика или улитку, которые двигаются по n-мерному тору, и теорема превращается в то, при определённых условиях на скорость кузнечик или улитка попадут в ямку вне зависимости от её положения. Предположим, что ямка имеет размер (n-мерный объём) ε. Пусть кузнечик сделал n прыжков, $k(n)$ из которых попали в ямку. А улитка ползала время t, причём $h(t)$ времени провела в ямке. Докажите, что **а)** $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=\varepsilon$; **б)** $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=\varepsilon$.

6. Пусть числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не обязательно линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда назовём ***следом*** кузнечика множество точек тора $(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что для любых рациональных $q_0,q_1,\ldots,q_n$ таких, что $q_0+q_1\alpha_1+\ldots+q_n\alpha_n=0$ существуют целые $m_1,m_2,\ldots,m_n$ такие, что $q_0+q_1(x_1+m_1)+\ldots+q_n(x_n+m_n)=0$. Докажите, что если на торе есть ямка, являющаяся открытым множеством, то кузнечик попадёт в неё тогда и только тогда, когда его след пересекается с ямкой.

11 класс

Теорема Кронекера

13 декабря 2018

1. а) По окружности длины 1 по часовой стрелке прыгает кузнечик прыжками постоянной иррациональной длины α. В некотором месте на этой окружности вырыта ямка длины ε. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в ямку.

б) Оцените сверху количество прыжков, которое потребуется кузнечику для повторного попадания в ямку, если точка старта находится в центре ямки.

2. Пусть, как и в предыдущей задаче, кузнечик прыгает по окружности с иррациональным шагом α и где-то на окружности есть ямка размера ε. Пусть за n прыжков кузнечик попал в ямку $k(n)$ раз. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=\varepsilon$.

3. Через два узла клетчатой бумаги проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе лежит бесконечно много узлов сетки.

Непрерывная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 ползают n улиток $k_1,\ldots,k_n$ со скоростями $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Докажите, что если числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ существует момент, когда все улитки попадут в свои ямки.

Дискретная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 прыгают n кузнечиков $k_1,\ldots,k_n$ с длинами прыжков $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Докажите, что если числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ существует момент, когда все кузнечики попадут в свои ямки.

4. а) Из непрерывной теоремы Кронекера для n улиток выведите дискретную теорему Кронекера для n кузнечиков.

б) Из дискретной теоремы Кронекера для n кузнечиков выведите непрерывную теорему Кронекера для $n+1$ улитки.

5. Напомним, что n-мерный тор — это декартово произведение n окружностей, или же n-мерный куб, в котором точки с координатами вида $(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$ склеены соответственно с точками $(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$. Тогда в условии теоремы Кронекера n кузнечиков/улиток, двигающихся по окружности, можно заменить на одного кузнечика или улитку, которые двигаются по n-мерному тору, и теорема превращается в то, при определённых условиях на скорость кузнечик или улитка попадут в ямку вне зависимости от её положения. Предположим, что ямка имеет размер (n-мерный объём) ε. Пусть кузнечик сделал n прыжков, $k(n)$ из которых попали в ямку. А улитка ползала время t, причём $h(t)$ времени провела в ямке. Докажите, что **а)** $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=\varepsilon$; **б)** $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=\varepsilon$.

6. Пусть числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не обязательно линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда назовём ***следом*** кузнечика множество точек тора $(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что для любых рациональных $q_0,q_1,\ldots,q_n$ таких, что $q_0+q_1\alpha_1+\ldots+q_n\alpha_n=0$ существуют целые $m_1,m_2,\ldots,m_n$ такие, что $q_0+q_1(x_1+m_1)+\ldots+q_n(x_n+m_n)=0$. Докажите, что если на торе есть ямка, являющаяся открытым множеством, то кузнечик попадёт в неё тогда и только тогда, когда его след пересекается с ямкой.