11 класс **Тригонометрия** 11 февраля 2019

1. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

2. Сумма синусов трёх углов равна 2. Докажите, что сумма косинусов этих же углов не превосходит $\sqrt{5}$.

3. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — положительные числа такие, что при всех x верно $\sin\alpha x + \sin\beta x = \sin\gamma x + \sin\delta x$. Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \delta$.

4. Какое наибольшее количество множителей можно вычеркнуть в левой части уравнения $\sin\frac{\pi}{x} \cdot \sin\frac{2\pi}{x} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{2019\pi}{x} = 0$ так, чтобы количество его натуральных корней не изменилось?

5. Докажите, что при $k > 2019$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \ldots \cdot \cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех x неравенству $|f_1(x)| \leqslant \frac{3}{2^{k+1}}$.

6. Число x таково, что обе суммы $\sin 64x + \sin 65x$ и $\cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из сумм оба слагаемых рациональны.

7. Докажите неравенство $\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leqslant 1$.

8. Сколько раз функция $f(x) = \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2019}$ меняет знак на отрезке $[0, \frac{2019\pi}{2}]$?

9. Докажите, что для всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ при $n > m$, где n, m — натуральные, справедливо неравенство

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leqslant 3|\sin^m x - \cos^m x|.$$

10. При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0$?

11 класс **Тригонометрия** 11 февраля 2019

1. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

2. Сумма синусов трёх углов равна 2. Докажите, что сумма косинусов этих же углов не превосходит $\sqrt{5}$.

3. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — положительные числа такие, что при всех x верно $\sin\alpha x + \sin\beta x = \sin\gamma x + \sin\delta x$. Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \delta$.

4. Какое наибольшее количество множителей можно вычеркнуть в левой части уравнения $\sin\frac{\pi}{x} \cdot \sin\frac{2\pi}{x} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{2019\pi}{x} = 0$ так, чтобы количество его натуральных корней не изменилось?

5. Докажите, что при $k > 2019$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \ldots \cdot \cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех x неравенству $|f_1(x)| \leqslant \frac{3}{2^{k+1}}$.

6. Число x таково, что обе суммы $\sin 64x + \sin 65x$ и $\cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из сумм оба слагаемых рациональны.

7. Докажите неравенство $\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leqslant 1$.

8. Сколько раз функция $f(x) = \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2019}$ меняет знак на отрезке $[0, \frac{2019\pi}{2}]$?

9. Докажите, что для всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ при $n > m$, где n, m — натуральные, справедливо неравенство

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leqslant 3|\sin^m x - \cos^m x|.$$

10. При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0$?