11 класс Повторим комбинаторику 14 февраля 2019

1. Дано натуральное $k > 2$. Алиса и Боб играют в игру. На доске написано натуральное $n \geqslant k$. Первой ходит Алиса. За один ход разрешается заменить число m на число m', взаимно простое с m, такое, что $k \leqslant m' < m$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Назовем число X *хорошим*, если Алиса имеет выигрышную стратегию, когда изначально на доске написано X, и *плохим* иначе. Пусть n и n' — два числа, не меньшие k, имеющие одинаковый набор простых делителей. Докажите, что числа n и n' либо оба плохие, либо оба хорошие.

2. В стране Направлений некоторые города соединены односторонними дорогами так, что из любого города исходит две дороги и в любой город входит две дороги. Правительство хочет закрыть половину дорог так, чтобы из каждого города исходило по одной дороге и в каждый город входило по одной дороге. Докажите, что количество способов сделать это является степенью двойки.

3. Найдите все n, для которых верно утверждение: в любой последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с общей суммой, равной $2n-1$, обязательно найдется несколько (более одного) подряд идущих чисел, среднее арифметическое которых — целое число.

4. Ребра графа на 60 вершинах покрашены в красный и синий цвет. Какое наибольшее количество ребер в этом графе может быть, если

(a) в нем нет одноцветных циклов длины 3;

(b) в нем нет одноцветных циклов как длины 3, так и длины 5?

5. По кругу стоят натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Оказалось, что для всех $i \in [1, n]$ число $k_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$ — натуральное ($x_{n+1} \equiv x_1$). Докажите, что $2n \leqslant k_1 + \ldots + k_n < 3n$.

6. $n \geqslant 4$ игроков играют в однокруговом теннисном турнире. Назовем компанию из четырех игроков *плохой*, если один из них проиграл трем остальным, которые выиграли друг у друга по циклу. Пусть w_i и l_i — количество побед и поражений у i-ого игрока. Докажите, что для турнира без плохих компаний справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - l_i)^3 \geqslant 0.$$

11 класс Повторим комбинаторику 14 февраля 2019

1. Дано натуральное $k > 2$. Алиса и Боб играют в игру. На доске написано натуральное $n \geqslant k$. Первой ходит Алиса. За один ход разрешается заменить число m на число m', взаимно простое с m, такое, что $k \leqslant m' < m$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Назовем число X *хорошим*, если Алиса имеет выигрышную стратегию, когда изначально на доске написано X, и *плохим* иначе. Пусть n и n' — два числа, не меньшие k, имеющие одинаковый набор простых делителей. Докажите, что числа n и n' либо оба плохие, либо оба хорошие.

2. В стране Направлений некоторые города соединены односторонними дорогами так, что из любого города исходит две дороги и в любой город входит две дороги. Правительство хочет закрыть половину дорог так, чтобы из каждого города исходило по одной дороге и в каждый город входило по одной дороге. Докажите, что количество способов сделать это является степенью двойки.

3. Найдите все n, для которых верно утверждение: в любой последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с общей суммой, равной $2n-1$, обязательно найдется несколько (более одного) подряд идущих чисел, среднее арифметическое которых — целое число.

4. Ребра графа на 60 вершинах покрашены в красный и синий цвет. Какое наибольшее количество ребер в этом графе может быть, если

(a) в нем нет одноцветных циклов длины 3;

(b) в нем нет одноцветных циклов как длины 3, так и длины 5?

5. По кругу стоят натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Оказалось, что для всех $i \in [1, n]$ число $k_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$ — натуральное ($x_{n+1} \equiv x_1$). Докажите, что $2n \leqslant k_1 + \ldots + k_n < 3n$.

6. $n \geqslant 4$ игроков играют в однокруговом теннисном турнире. Назовем компанию из четырех игроков *плохой*, если один из них проиграл трем остальным, которые выиграли друг у друга по циклу. Пусть w_i и l_i — количество побед и поражений у i-ого игрока. Докажите, что для турнира без плохих компаний справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - l_i)^3 \geqslant 0.$$