11 класс **Геометрические неравенства** 18 февраля 2019

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Докажите, что
$$AM \cdot CM + BM \cdot DM \geqslant AB \cdot BC.$$

2. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

3. Даны $n > 1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на этой окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \ldots + PA_n > n$.

4. Дан правильный треугольник ABC со стороной 1 и точка P внутри него. Докажите, что $PA + PB + PC \leqslant 2$.

5. Пусть M, N, K — произвольные точки на сторонах BC, AC, AB соответственно остроугольного треугольника ABC. Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств
$$NK \geqslant \frac{BC}{2}, KM \geqslant \frac{AC}{2}, MN \geqslant \frac{AB}{2}.$$

6. Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1. Докажите, что

а) треугольник ACE — остроугольный;

б) $\min(R_{ACE}, R_{BDF}) \leqslant 1$;

в) $\min(AD, BE, CF) \leqslant 2$.

7. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, P — произвольная точка плоскости этого треугольника. Найдите минимум выражения $AP \cdot AM + BP \cdot BM + CP \cdot CM$ и выясните, где он достигается.

8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что
$$AB + BC + CD + DA \leqslant AC + BD + 2R.$$

11 класс **Геометрические неравенства** 18 февраля 2019

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Докажите, что
$$AM \cdot CM + BM \cdot DM \geqslant AB \cdot BC.$$

2. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

3. Даны $n > 1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на этой окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \ldots + PA_n > n$.

4. Дан правильный треугольник ABC со стороной 1 и точка P внутри него. Докажите, что $PA + PB + PC \leqslant 2$.

5. Пусть M, N, K — произвольные точки на сторонах BC, AC, AB соответственно остроугольного треугольника ABC. Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств
$$NK \geqslant \frac{BC}{2}, KM \geqslant \frac{AC}{2}, MN \geqslant \frac{AB}{2}.$$

6. Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1. Докажите, что

а) треугольник ACE — остроугольный;

б) $\min(R_{ACE}, R_{BDF}) \leqslant 1$;

в) $\min(AD, BE, CF) \leqslant 2$.

7. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, P — произвольная точка плоскости этого треугольника. Найдите минимум выражения $AP \cdot AM + BP \cdot BM + CP \cdot CM$ и выясните, где он достигается.

8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что
$$AB + BC + CD + DA \leqslant AC + BD + 2R.$$