11 класс Теорема Ван дер Вардена 21 февраля 2019

1. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в 100 цветов. Докажите, что существуют 100 строк и 100 столбцов таких, что 10000 клеток на их пересечении одноцветны.

2. а) Теорема ван дер Вардена. Докажите, что для любых n и l существует натуральное N такое, что при любой раскраске первых N натуральных чисел в n цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l.

б) Правда ли, что при любой раскраске натуральных чисел в несколько цветов найдется бесконечная одноцветная арифметическая или геометрическая прогрессия?

3. Докажите, что при любой раскраске целых точек координатной плоскости в 2019 цветов найдется одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник.

4. Обобщенная теорема Ван дер Вардена. На плоскости дано конечное множество точек M с целыми координатами. Докажите, что для данного множества M и любого натурального n существует N такое, что при любой покраске узлов квадрата $N \times N$ в n цветов в нем найдется одноцветное множество точек, гомотетичное M.

а) Докажите теорему при $|M| = 2$.

б) Пусть теорема доказана для $|M| = k$ и произвольного количества цветов. Докажите теорему для $|M| = k+1$ и двух цветов.

в) Пусть теорема доказана для данного M и двух цветов. Докажите ее для произвольного количества цветов.

5. На бесконечной полоске клетчатой бумаги записаны целые числа. Докажите, что для любых натуральных m и n найдутся такие m одинаковых отрезков, идущих подряд, что сумма чисел внутри каждого из них делится на n.

6. Натуральные числа покрасили таким образом, что среди любых 1000 подряд идущих чисел есть красное. Докажите, что существует красная арифметическая прогрессия длины 1000.

11 класс Теорема Ван дер Вардена 21 февраля 2019

1. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в 100 цветов. Докажите, что существуют 100 строк и 100 столбцов таких, что 10000 клеток на их пересечении одноцветны.

2. а) Теорема ван дер Вардена. Докажите, что для любых n и l существует натуральное N такое, что при любой раскраске первых N натуральных чисел в n цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l.

б) Правда ли, что при любой раскраске натуральных чисел в несколько цветов найдется бесконечная одноцветная арифметическая или геометрическая прогрессия?

3. Докажите, что при любой раскраске целых точек координатной плоскости в 2019 цветов найдется одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник.

4. Обобщенная теорема Ван дер Вардена. На плоскости дано конечное множество точек M с целыми координатами. Докажите, что для данного множества M и любого натурального n существует N такое, что при любой покраске узлов квадрата $N \times N$ в n цветов в нем найдется одноцветное множество точек, гомотетичное M.

а) Докажите теорему при $|M| = 2$.

б) Пусть теорема доказана для $|M| = k$ и произвольного количества цветов. Докажите теорему для $|M| = k+1$ и двух цветов.

в) Пусть теорема доказана для данного M и двух цветов. Докажите ее для произвольного количества цветов.

5. На бесконечной полоске клетчатой бумаги записаны целые числа. Докажите, что для любых натуральных m и n найдутся такие m одинаковых отрезков, идущих подряд, что сумма чисел внутри каждого из них делится на n.

6. Натуральные числа покрасили таким образом, что среди любых 1000 подряд идущих чисел есть красное. Докажите, что существует красная арифметическая прогрессия длины 1000.