11 класс О ряде натуральных чисел 11 марта 2019

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел с *положительной плотностью*, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для достаточно больших N среди первых N натуральных чисел встречается хотя бы $N\varepsilon$ членов последовательности. Докажите, что в этой последовательности можно выбрать бесконечную подпоследовательность, в которой ни одно из чисел не кратно другому.

2. Существуют ли 2019 непересекающихся арифметических прогрессий натуральных чисел таких, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2019, и лишь конечное количество натуральных чисел в них не лежит?

3. Дано натуральное n. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — натуральные числа, не превосходящие n, НОК любых двух из которых больше n. Докажите, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

4. В некоторых натуральных точках прямой расположены кузнечики, в каждой точке не более одного. Известно, что для любого натурального n в точках $1, 2, \ldots, n$ суммарно находится не больше, чем $[\frac{n}{2}]$ кузнечиков. Каждую секунду некоторые из кузнечиков одновременно прыгают на 1 вправо: если точка, куда хочет прыгнуть кузнечик, свободна, то он прыгает, а если занята, то остается на месте. Докажите, что каждый кузнечик, начиная с некоторого момента, будет прыгать без остановки.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность, в которой каждое натуральное число встречается по разу. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $(a_n, a_{n+1}) \leqslant \frac{3n}{4}$.

6. а) Для различных комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_k$ нашлись комплексные $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что для всех целых i от 0 до $k-1$ справедливо $a_1 z_1^i + a_2 z_2^i + \ldots + a_k z_k^i = 0$. Докажите, что $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

б) Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Оказалось, что в объединении эти прогрессии покрывают числа $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Докажите, что в объединении они покрывают все целые числа.

11 класс О ряде натуральных чисел 11 марта 2019

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел с *положительной плотностью*, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для достаточно больших N среди первых N натуральных чисел встречается хотя бы $N\varepsilon$ членов последовательности. Докажите, что в этой последовательности можно выбрать бесконечную подпоследовательность, в которой ни одно из чисел не кратно другому.

2. Существуют ли 2019 непересекающихся арифметических прогрессий натуральных чисел таких, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2019, и лишь конечное количество натуральных чисел в них не лежит?

3. Дано натуральное n. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — натуральные числа, не превосходящие n, НОК любых двух из которых больше n. Докажите, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

4. В некоторых натуральных точках прямой расположены кузнечики, в каждой точке не более одного. Известно, что для любого натурального n в точках $1, 2, \ldots, n$ суммарно находится не больше, чем $[\frac{n}{2}]$ кузнечиков. Каждую секунду некоторые из кузнечиков одновременно прыгают на 1 вправо: если точка, куда хочет прыгнуть кузнечик, свободна, то он прыгает, а если занята, то остается на месте. Докажите, что каждый кузнечик, начиная с некоторого момента, будет прыгать без остановки.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность, в которой каждое натуральное число встречается по разу. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $(a_n, a_{n+1}) \leqslant \frac{3n}{4}$.

6. а) Для различных комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_k$ нашлись комплексные $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что для всех целых i от 0 до $k-1$ справедливо $a_1 z_1^i + a_2 z_2^i + \ldots + a_k z_k^i = 0$. Докажите, что $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

б) Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Оказалось, что в объединении эти прогрессии покрывают числа $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Докажите, что в объединении они покрывают все целые числа.