

1. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, пересекающие данные, красятся в синий цвет. Какие точки останутся непокрашенными?

2. В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE . Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.

3. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

4. Дан тетраэдр $ABCD$, в нем I_a, I_b, I_c, I_d — центры вписанных в треугольники $B_1CD, A_1CD, A_1BD, A_1BC$ окружностей. Оказалось, что отрезки AI_a и BI_b пересекаются. Докажите, что отрезки CI_c и DI_d также пересекаются.

5. Основания трёх высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что все рёбра пирамиды равны.

6. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две непараллельные треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники $ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1$. Докажите, что плоскость, проходящая через точки пересечения диагоналей этих граней, содержит прямую пересечения плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

7. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины рёбер SA, SB, SC, SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники $ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D$ являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

8. Треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу с центром O . Для каждой вершины соединим прямой точку пересечения медиан противоположащей грани с точкой, симметричной этой вершине относительно точки O .

а) Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке (обозначим её через F).

б) Докажите, что отрезок, соединяющий F с серединой ребра AB , перпендикулярен ребру CD .

1. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, пересекающие данные, красятся в синий цвет. Какие точки останутся непокрашенными?

2. В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE . Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.

3. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

4. Дан тетраэдр $ABCD$, в нем I_a, I_b, I_c, I_d — центры вписанных в треугольники $B_1CD, A_1CD, A_1BD, A_1BC$ окружностей. Оказалось, что отрезки AI_a и BI_b пересекаются. Докажите, что отрезки CI_c и DI_d также пересекаются.

5. Основания трёх высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что все рёбра пирамиды равны.

6. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две непараллельные треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники $ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1$. Докажите, что плоскость, проходящая через точки пересечения диагоналей этих граней, содержит прямую пересечения плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

7. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины рёбер SA, SB, SC, SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники $ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D$ являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

8. Треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу с центром O . Для каждой вершины соединим прямой точку пересечения медиан противоположащей грани с точкой, симметричной этой вершине относительно точки O .

а) Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке (обозначим её через F).

б) Докажите, что отрезок, соединяющий F с серединой ребра AB , перпендикулярен ребру CD .