

1. Сфера касается сторон многогранного угла. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.
2. Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB , SBC , SCA в точках D , E , F соответственно. Найдите сумму углов SDA , SEB и SFC .
3. В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей ее противоположных боковых граней равны.
4. В тетраэдре середины всех рёбер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке.
5. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)
6. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину D . Пусть это сечение пересекло ребра DA , DB , DC в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что точки A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной сфере.
7. Дана пирамида $SA_1A_2 \dots A_k$. Существует сфера ω , которая касается всех ребер пирамиды и другая сфера ω_1 , которая касается всех сторон основания и продолжений боковых рёбер за вершины основания. Докажите, что все боковые рёбра равны, если **а)** $k = 5$; **б)** $k = 4$.
8. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера ω касается грани BCD в точке T . Сфера ω_1 касается грани BCD в точке T_1 и продолжения граней ABC , ABD , ACD . Докажите, что точки T и T_1 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD .

1. Сфера касается сторон многогранного угла. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.
2. Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB , SBC , SCA в точках D , E , F соответственно. Найдите сумму углов SDA , SEB и SFC .
3. В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей ее противоположных боковых граней равны.
4. В тетраэдре середины всех рёбер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке.
5. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)
6. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину D . Пусть это сечение пересекло ребра DA , DB , DC в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что точки A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной сфере.
7. Дана пирамида $SA_1A_2 \dots A_k$. Существует сфера ω , которая касается всех ребер пирамиды и другая сфера ω_1 , которая касается всех сторон основания и продолжений боковых рёбер за вершины основания. Докажите, что все боковые рёбра равны, если **а)** $k = 5$; **б)** $k = 4$.
8. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера ω касается грани BCD в точке T . Сфера ω_1 касается грани BCD в точке T_1 и продолжения граней ABC , ABD , ACD . Докажите, что точки T и T_1 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD .