11–2 **Многочлены** 19 ноября 2018

1. Вася с каждым приведенным квадратным трёхчленом проделывает следующую операцию: рисует его график, ищет точки пересечения с осями координат и, если получилось 3 точки, то проводит через эти точки окружность. Докажите, что все такие окружности имеют общую точку.

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что при любых натуральных m и n число $P(m+n)$ делится хотя бы на одной из чисел: m или n.

3. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(f(f(x)))))) = 0$.

4. Многочлен x^3+px^2+qx+r имеет на интервале $(0,2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p+q+r < 0$.

5. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

6. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существуют различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которых

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \ldots, \quad P(x_n) = x_1.$$

7. Множество из миллиона последовательных натуральных чисел назовём *необычным*, если его можно разбить на два множества так, что произведения чисел в них равны. Докажите, что количество необычных подмножеств конечно.

11–2 **Многочлены** 19 ноября 2018

1. Вася с каждым приведенным квадратным трёхчленом проделывает следующую операцию: рисует его график, ищет точки пересечения с осями координат и, если получилось 3 точки, то проводит через эти точки окружность. Докажите, что все такие окружности имеют общую точку.

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что при любых натуральных m и n число $P(m+n)$ делится хотя бы на одной из чисел: m или n.

3. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(f(f(x)))))) = 0$.

4. Многочлен x^3+px^2+qx+r имеет на интервале $(0,2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p+q+r < 0$.

5. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

6. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существуют различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которых

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \ldots, \quad P(x_n) = x_1.$$

7. Множество из миллиона последовательных натуральных чисел назовём *необычным*, если его можно разбить на два множества так, что произведения чисел в них равны. Докажите, что количество необычных подмножеств конечно.