

Определение 1. Однородным симметрическим многочленом, порождённым упорядоченным набором вещественных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, называют выражение

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdot x_2^{a_{\sigma(2)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{\sigma(n)}},$$

где суммирование ведётся по множеству S_n всех перестановок на n элементах.

Примеры: $T(3, 2, 1) = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^3z^2y + z^3y^2x + y^3x^2z$; $T(1, 1, 0) = 2 \cdot (xy + yz + zx)$; $T(1, 1, 1) = 6xyz$.

Определение 2. Пусть дано два набора действительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Мы говорим, что набор a_i вещественных чисел *мажорирует* набор b_i , если выполнена система из неравенств и одного равенства (запись $a_i \succ b_i$):

$$\begin{aligned} a_1 &\geq b_1; \\ a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2; \\ a_1 + a_2 + a_3 &\geq b_1 + b_2 + b_3; \\ &\dots \\ a_1 + \dots + a_{n-1} &\geq b_1 + \dots + b_{n-1}; \\ a_1 + \dots + a_n &= b_1 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Неравенство Мюрхеда. Если $a_i \succ b_i$, то при всех положительных значениях переменных

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq T(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Беспользные рекомендации: T -обозначения юзабельны; используйте их, когда приходится раскрывать страшные скобки. Пример:

$$(a + b + c)^3 = \frac{1}{2} \cdot T(3, 0, 0) + 3 \cdot T(2, 1, 0) + T(1, 1, 1).$$

Для проверки вычислений подставляйте $a = b = c = 1$: $(1 + 1 + 1)^3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 6$. Если исходное неравенство (или связка) не однородное, хорошо помогает подстановка вместо всех переменных $a = a'/t$, а затем выражение t в неравенстве и в связке.

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq \frac{1}{2} \cdot (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3).$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$1 - 2\sqrt{abc(a+b+c)} + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 0.$$

Когда в неравенстве достигается равенство?

3. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

5. Про положительные числа a, b, c известно, что $\frac{3}{abc} \geq a + b + c$. Докажите, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c.$$

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a + b + c + d) \geq abcd$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd.$$