11–2 Тренировочный вариант 17 января 2019

1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одной делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, …, ровно семь — на 2?

2. Даны числа a, b, c. Известно, что для любого x выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$.

3. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвёртое ребро также является хорошим.

4. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

5. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c} = \sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c} = \sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}.$$

для некоторых x, y, z, a, b, c, то $x = y = z$ или $a = b = c$.

11–2 Тренировочный вариант 17 января 2019

1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одной делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, …, ровно семь — на 2?

2. Даны числа a, b, c. Известно, что для любого x выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$.

3. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвёртое ребро также является хорошим.

4. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

5. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c} = \sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c} = \sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}.$$

для некоторых x, y, z, a, b, c, то $x = y = z$ или $a = b = c$.