11–2 Тренировочный вариант 21 января 2019

1. На всех клетках доски $n \times n$ ($n > 1$) расставлены фишки трёх цветов. Оказалось, что рядом с любой фишкой стоят фишки обоих других цветов. Докажите, что какие-то фишки одного цвета стоят рядом (две фишки стоят рядом, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону).

2. Известно, что для чисел a, b, c выполнено двойное неравенство

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a} \geqslant \frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}.$$

Докажите, что $a = b = c$.

3. Из десятичного разложения дроби $\frac{1}{p}$ ($p > 5$, p — простое) вычеркнули 2000-ю цифру. В результате получилось десятичное разложение несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что b делится на p.

4. В стране 64 города. Широта и долгота каждого города измеряются целым числом градусов от 1 до 8. Два города соединены двусторонним авиарейсом тогда и только тогда, когда они либо имеют одинаковую широту, а их долгота отличается на 1°, либо имеют одинаковую долготу, а их широта отличается на 1°. Какое наибольшее число авиарейсов можно отменить, чтобы из любого города в любой другой можно было попасть, совершив не более 14 перелётов?

5. На основании ABC треугольной пирамиды $SABC$, у которой все плоские углы при вершине S больше 60°, произвольно взята точка O. Докажите, что по крайней мере один из углов SAO, SBO, SCO меньше 60°.

11–2 Тренировочный вариант 21 января 2019

1. На всех клетках доски $n \times n$ ($n > 1$) расставлены фишки трёх цветов. Оказалось, что рядом с любой фишкой стоят фишки обоих других цветов. Докажите, что какие-то фишки одного цвета стоят рядом (две фишки стоят рядом, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону).

2. Известно, что для чисел a, b, c выполнено двойное неравенство

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a} \geqslant \frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}.$$

Докажите, что $a = b = c$.

3. Из десятичного разложения дроби $\frac{1}{p}$ ($p > 5$, p — простое) вычеркнули 2000-ю цифру. В результате получилось десятичное разложение несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что b делится на p.

4. В стране 64 города. Широта и долгота каждого города измеряются целым числом градусов от 1 до 8. Два города соединены двусторонним авиарейсом тогда и только тогда, когда они либо имеют одинаковую широту, а их долгота отличается на 1°, либо имеют одинаковую долготу, а их широта отличается на 1°. Какое наибольшее число авиарейсов можно отменить, чтобы из любого города в любой другой можно было попасть, совершив не более 14 перелётов?

5. На основании ABC треугольной пирамиды $SABC$, у которой все плоские углы при вершине S больше 60°, произвольно взята точка O. Докажите, что по крайней мере один из углов SAO, SBO, SCO меньше 60°.