11 класс | Про лампочки | 20 сентября 2018

1. В люстру ввинчено k лампочек, к ним подведено n выключателей. Каждый выключатель меняет состояние нескольких лампочек на противоположное. Докажите, что $k > n$, то злой электрик может включить несколько лампочек так, что с помощью выключателей нельзя будет погасить весь свет.

2. Механизм замка банковского хранилища основан на 10 пятиконечных шестеренках (когда все шестеренки правильно повернуты, то замок открыт). При использовании определенного вида отмычки, некоторые шестеренки поворачиваются на фиксированный угол (например, при использовании отмычки первого вида первая шестеренка поворачивается на $72°$ по часовой стрелке, а третья — на $144°$ против часовой стрелки). Всегда ли вору хватит 9 видов отмычек, чтобы взломать замок?

3. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены либо в белый, либо в черный цвет. Разрешается выбрать любой квадрат 3×3 или 4×4 и перекрасить все его клетки в противоположный цвет. Верно ли, что при любой первоначальной раскраске можно в итоге весь квадрат покрасить в черный цвет?

4. В городе Цветочном 1000 площадей и 1000 улиц. Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо Синей, либо Красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя сделать все улицы Синими.

5. В классе 20 учеников, они ходили в 21 поход. Докажите, что можно выбрать несколько походов так, что каждый ученик ходил в чётное число из них.

6. Имеется $n+1$ непустое подмножество n-элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.