

## Уравнения в целых числах

### Делимость помогает

1. Найдите все простые числа  $p, q, r$ , удовлетворяющие равенству  $p^q + q^p = r$ .
2. Докажите, что ни при каком натуральном  $m$  число  $123456^m - 1$  не делится на  $1000^m - 1$ .
3. Доказать, что в последовательности  $11, 111, 1111, 11111, \dots$  нет точных квадратов.

### Алгебраические преобразования помогают

1. Докажите, что если  $p$  и  $q$  — два простых числа, причём  $q = p + 2$ , то  $p^q + q^p$  делится на  $p + q$ .
2. Пусть  $a$  и  $b$  — целые числа. Докажите, что если  $a^2 + 9ab + b^2$  делится на 11, то и  $a^2 - b^2$  делится на 11.
3. Найдите все такие натуральные  $x, y$  и простые  $p$ , что выполняется

$$x^3 + 3xy(x + y) + 2y^3 = p.$$

### Разные задачи

1. Решите в целых числах  $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$ .
2. Найдите все натуральные  $n$  такие, что

$$1^n + 2^n + \dots + (n - 1)^n \div n.$$

3. Решите в натуральных числах уравнение  $3^x + 4^y = 5^z$ .
4. Найдите все такие натуральные  $x$  и простые  $p$ , что выполняется  $x^8 + 2^{2^x + 2} = p$ .
5. Докажите, что любое число вида  $3k - 2$  представляется в виде суммы двух кубов и квадрата целых чисел.