Отборочная олимпиада

Задача 1. На троллейбусном маршруте между Хамовническим валом и Парком культуры ходят 6 троллейбусов (интервалы между троллейбусами не обязательно одинаковые). Они идут без остановок с постоянными скоростями, и каждый из них, дойдя до конца маршрута, разворачивается и идет обратно. Написав олимпиаду, Егор, не застав троллейбус на Хамовническом валу, отправился к Парку культуры пешком. При этом он 18 раз встретил троллейбус, идущий к нему навстречу. Сколько раз троллейбусы обгоняли Егора, если добравшись до Парка Культуры, он не застал там ни одного троллейбуса?

Решение. Возьмем любой из троллейбусов. Моменты, когда он попадался Егору навстречу и когда он обгонял Егора, очевидно, чередовались. При этом первым и последним из них были моменты, когда троллейбус шёл Егору навстречу: иначе бы Егор застал бы троллейбус на Хамовническом валу или в Парке культуры. Поэтому каждый троллейбус попался Егору навстречу на один раз больше, чем обогнал его. Значит, троллейбусы обгоняли Егора 12 раз. □

Задача 2. Петя и Вася выписывают на доску 20-значное число, состоящее только из цифр от 1 до 5. Петя пишет первую цифру, Вася — вторую, Петя — третью и т. д. Если итоговое число делится на 9, то выигрывает Вася, если же нет, то Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Признак делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Пусть первым ходом Петя напишет цифру 1, а оставшимися ходами он будет писать цифру, которая будет давать в сумме с написанной Васей цифрой 6. Тогда после того как будет написана 19-я цифра на доске, сумма цифр числа будет равна $1 + 6 \cdot 9$, что дает остаток 1 при делении на 9. Теперь какую бы цифру не поставил Вася сумма цифр не будет делиться на 9, и следовательно само число не будет делиться на 9. Значит выиграет Петя. □

Задача 3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка M. Из M на боковые стороны AB и BC опустили перпендикуляры ML и MN соответственно. На отрезке LB выбрана точка X такая, что $AL = LX$, а на отрезке NB — точка Y такая, что $YN = NC$. Докажите, что $AY = XC$.

Решение. Рис. 1. ΔABC — равнобедренный $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = \alpha$

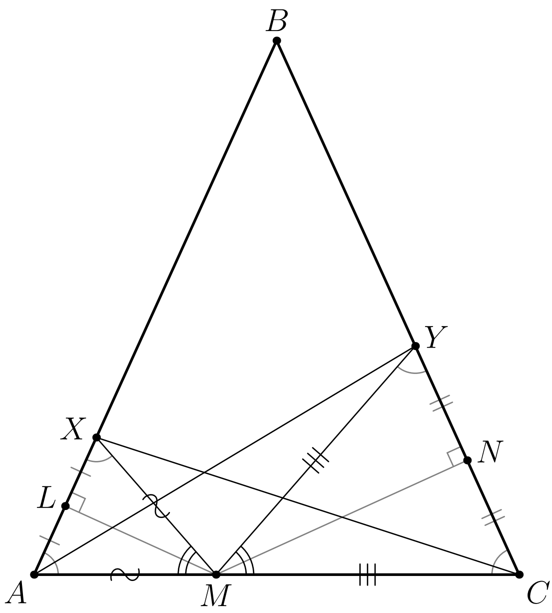

Рис. 1: к задаче 3

ΔAXM — равнобедренный, т.к. ML — высота и медиана.

Аналогично ΔCYM — равнобедренный.

ΔAXM — равнобедренный $\Rightarrow AM = XM$, $\angle MAX = \angle MXA = \alpha$

ΔCYM — равнобедренный $\Rightarrow CM = YM$, $\angle MCY = \angle MYC = \alpha$

$\angle AMX = 180^\circ - \angle MAX - \angle MXA = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle CMY = 180^\circ - \angle MCY - \angle MYC = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle AMX = \angle CMY \Rightarrow \angle AMX + \angle XMY = \angle XMY + \angle CMY \Rightarrow \angle AMY = \angle XMC$

$\Delta AMY = \Delta XMC$ т.к. $AM = XM$, $MY = MC$, $\angle AMY = \angle XMC \Rightarrow AY = XC$

$\square$

Задача 4. На доске написаны 5 натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трех из них делится на каждое из остальных. Докажите, что среди этих чисел найдутся четыре равных.

Решение. Пусть на доске были записаны натуральные числа a, b, c, d, e, причём $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Тогда по условию $a + b + c \,\vdots\, e$ и $b + c + d \,\vdots\, e$. Тогда вычтем из второго выражения первое и получим $d - a \,\vdots\, e$. Но тогда в силу того, что a —

натуральное и $a \leqslant d \leqslant e$ имеем $0 \leqslant d - a \leqslant e - a < e$. Но в полуинтервале $[0, e)$ только 0 делится на e, следовательно $a = d$, а т.к $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ то получаем $a = b = c = d$. $\square$

Задача 5. У Лёлика есть 11 одинаковых на вид коробок; он знает, что их веса равны 10, 20, 30, ..., 110 кг. Еще у него есть тележка, которая выдерживает максимум 111 кг. Болик узнал веса всех коробок и хочет показать Лёлику, что первая коробка весит 10 кг.

Он может загрузить несколько из них в тележку и показать Лёлику, что тележка выдержала. За какое наименьшее количество загрузок тележки Болик сможет добиться требуемого?

Решение. Пусть Болик сначала загрузит в тележку коробки с весами 10, 20, 30 и 50 кг, а потом — коробки с весами 10, 40 и 60 кг. В обоих случаях тележка выдержит. Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды была использована коробка веса 10 кг. Действительно, если бы Болик в эти два раза вместо коробок с весами 10, ..., 60 кг использовал соответственно коробки с весами $w_1, \ldots, w_6$ кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leqslant 111$, $w_1 + w_4 + w_6 \leqslant 111$. Складывая, получаем $w_1 + (w_1 + w_2 + \ldots + w_6) \leqslant 222$. Заметим, что сумма в скобках не меньше $10 + 20 + \ldots + 60 = 210$. Отсюда следует, что $w_1 \leqslant 222 - 210 = 12$. Значит, $w_1 = 10$, то есть коробка веса 10 кг однозначно определена.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Болик загрузит одну коробку, то тележка выдержит в любом случае, то есть никакую коробку идентифицировать не удастся. Пусть Болик загрузит больше одной коробки, и тележка выдержит. Если коробка в 10 кг не загружена в тележку, то при замене ею любой коробки из тележки результат не изменится; значит, в этом случае Лёлик даже не сможет понять, находится ли эта коробка в тележке. Если же искомая коробка в тележке, то Лёлик не сможет понять, какая из (хотя бы двух) загруженных коробок — требуемая. $\square$