8 класс **Конечное и бесконечное** 22 сентября 2018

1. Верно ли, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много последовательных составных чисел? А бесконечно много последовательных составных чисел?

2. Бизнесмен заключил с чёртом соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Докажите, что рано или поздно бизнесмен разорится. (Номиналов купюр всего конечное число; другого источника купюр у бизнесмена нет; взамен самой маленькой купюры он ничего не получает.)

3. Круг радиуса 1 км раскрашен в два цвета. Докажите, что найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

4. Докажите, что в десятичной записи $\sqrt{2}$ бесконечно много раз
а) встречается какая-то цифра; **б)** встречаются какие-то две цифры.

5. Можно ли покрыть

а) прямую конечным числом кругов?

б) плоскость конечным числом полос? (Полоса — это часть плоскости между параллельными прямыми.)

6. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная возрастающая *арифметическая прогрессия* (последовательность, в которой разность соседних членов всегда одна и та же)?

7. Для любого n сумма n первых членов некоторой последовательности больше n. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много положительных чисел.

8. Круг разделён на 2018 секторов, в каждом написано натуральное число. В одном из секторов стоит фишка. Каждую минуту прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано число k), фишка сдвигается на k секторов по часовой стрелке, и там, куда она попадает, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое время все числа станут больше 10^{2018}.

9. Среди какого наименьшего количества бесконечных десятичных дробей гарантированно найдутся две, совпадающие в бесконечном числе позиций?

10. а) Докажите, что сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}$ становится больше любого наперёд заданного числа при достаточно больших m.

б) Верно ли то же утверждение для суммы $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}$?

11. Лемма Кёнига. Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный простой путь.

8 класс **Конечное и бесконечное** 22 сентября 2018

1. Верно ли, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много последовательных составных чисел? А бесконечно много последовательных составных чисел?

2. Бизнесмен заключил с чёртом соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Докажите, что рано или поздно бизнесмен разорится. (Номиналов купюр всего конечное число; другого источника купюр у бизнесмена нет; взамен самой маленькой купюры он ничего не получает.)

3. Круг радиуса 1 км раскрашен в два цвета. Докажите, что найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

4. Докажите, что в десятичной записи $\sqrt{2}$ бесконечно много раз
а) встречается какая-то цифра; **б)** встречаются какие-то две цифры.

5. Можно ли покрыть

а) прямую конечным числом кругов?

б) плоскость конечным числом полос? (Полоса — это часть плоскости между параллельными прямыми.)

6. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная возрастающая *арифметическая прогрессия* (последовательность, в которой разность соседних членов всегда одна и та же)?

7. Для любого n сумма n первых членов некоторой последовательности больше n. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много положительных чисел.

8. Круг разделён на 2018 секторов, в каждом написано натуральное число. В одном из секторов стоит фишка. Каждую минуту прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано число k), фишка сдвигается на k секторов по часовой стрелке, и там, куда она попадает, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое время все числа станут больше 10^{2018}.

9. Среди какого наименьшего количества бесконечных десятичных дробей гарантированно найдутся две, совпадающие в бесконечном числе позиций?

10. а) Докажите, что сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}$ становится больше любого наперёд заданного числа при достаточно больших m.

б) Верно ли то же утверждение для суммы $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}$?

11. Лемма Кёнига. Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный простой путь.