8 класс | Целая и дробная части | 3 ноября 2018

Определение. *Целая часть* $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее данное число x. *Дробная часть* числа x определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

1. $[x+n] = [x] + n$, где n — целое.
2. $\{x+n\} = \{x\}$, где n — целое.
3. $[x+y] \geqslant [x] + [y]$;
4. $\{x+y\} \leqslant \{x\} + \{y\}$;
5. $\{x+y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

1. Найдите все натуральные n, для которых число $[\frac{n^2}{5}]$ — простое.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+[y] = \{z\} + 54, \\ y + [z] = \{x\} + 54, \\ z + [x] = \{y\} + 54. \end{cases}$

3. Решите уравнение $\sqrt{1+\{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$.

4. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x+y+z\} = \{y+z+t\} = \{z+t+x\} = \{t+x+y\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x+y+z+t\}$.

5. Решите уравнение
$$[x] + \frac{2018}{[x]} = \{x\} + \frac{2018}{\{x\}}.$$

6. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

7. Существует ли рациональное число $x > 0$, для которого $\left\{x^2\right\} + \{x\} = 1$?

8. Докажите, что если $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$, то $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1$.

9. Для $x > 1$ докажите неравенство
$$\frac{x+\{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x+\{x\}} + \frac{x+[x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x+[x]} > 5.$$

10. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.

11. Для натуральных чисел a, b, c, d найдите наименьшее значение выражения
$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right] + \left[\frac{a+b+d}{c}\right] + \left[\frac{a+c+d}{b}\right] + \left[\frac{b+c+d}{a}\right].$$

12. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что
$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

8 класс | Целая и дробная части | 3 ноября 2018

Определение. *Целая часть* $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее данное число x. *Дробная часть* числа x определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

1. $[x+n] = [x] + n$, где n — целое.
2. $\{x+n\} = \{x\}$, где n — целое.
3. $[x+y] \geqslant [x] + [y]$;
4. $\{x+y\} \leqslant \{x\} + \{y\}$;
5. $\{x+y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

1. Найдите все натуральные n, для которых число $[\frac{n^2}{5}]$ — простое.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+[y] = \{z\} + 54, \\ y + [z] = \{x\} + 54, \\ z + [x] = \{y\} + 54. \end{cases}$

3. Решите уравнение $\sqrt{1+\{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$.

4. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x+y+z\} = \{y+z+t\} = \{z+t+x\} = \{t+x+y\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x+y+z+t\}$.

5. Решите уравнение
$$[x] + \frac{2018}{[x]} = \{x\} + \frac{2018}{\{x\}}.$$

6. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

7. Существует ли рациональное число $x > 0$, для которого $\left\{x^2\right\} + \{x\} = 1$?

8. Докажите, что если $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$, то $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1$.

9. Для $x > 1$ докажите неравенство
$$\frac{x+\{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x+\{x\}} + \frac{x+[x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x+[x]} > 5.$$

10. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.

11. Для натуральных чисел a, b, c, d найдите наименьшее значение выражения
$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right] + \left[\frac{a+b+d}{c}\right] + \left[\frac{a+c+d}{b}\right] + \left[\frac{b+c+d}{a}\right].$$

12. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что
$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$