8 класс | **Числа сочетаний** | 15 декабря 2018

1. а) Пусть p — простое число, $0 < k < p$. Докажите, что $C_p^k \vdots p$.

б) Докажите, что $\dfrac{(d_1 + d_2 + \dots + d_m)!}{d_1! d_2! \dots d_m!}$ — целое число.

в) Для натурального n докажите, что $C_{2n}^n \vdots n + 1$.

2. В клетчатом квадрате $(n+1) \times (n+1)$ строки и столбцы пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$. Рассмотрим пути из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*. Количество таких путей обозначается C_n и называется n-м *числом Каталана*.

а) Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Постройте биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

б) Постройте биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$-угольника диагоналями на треугольники.

в) Докажите, что число путей из $(0,0)$ в (n,n), которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0,0)$ в $(n-1, n+1)$. Выведите отсюда формулу для n-го числа Каталана.

3. Найдите сумму $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

4. а) Сколько существует последовательностей из букв А и Б длины n, в которых никакие две буквы Б не стоят рядом?

б) Найдите сумму $C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$

5. а) В классе учится n ребят. Учитель хочет отправить на олимпиаду команду произвольного размера, один из членов которой был бы капитаном. Из скольких вариантов ему нужно выбирать?

б) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

в) Найдите сумму $C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n$.

г) Найдите сумму $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n+1} nC_n^n$.

6. Даны натуральные числа $k < m < n$. Докажите, что $(C_n^k, C_n^m) > 1$.

8 класс | **Числа сочетаний** | 15 декабря 2018

1. а) Пусть p — простое число, $0 < k < p$. Докажите, что $C_p^k \vdots p$.

б) Докажите, что $\dfrac{(d_1 + d_2 + \dots + d_m)!}{d_1! d_2! \dots d_m!}$ — целое число.

в) Для натурального n докажите, что $C_{2n}^n \vdots n + 1$.

2. В клетчатом квадрате $(n+1) \times (n+1)$ строки и столбцы пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$. Рассмотрим пути из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*. Количество таких путей обозначается C_n и называется n-м *числом Каталана*.

а) Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Постройте биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

б) Постройте биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$-угольника диагоналями на треугольники.

в) Докажите, что число путей из $(0,0)$ в (n,n), которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0,0)$ в $(n-1, n+1)$. Выведите отсюда формулу для n-го числа Каталана.

3. Найдите сумму $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

4. а) Сколько существует последовательностей из букв А и Б длины n, в которых никакие две буквы Б не стоят рядом?

б) Найдите сумму $C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$

5. а) В классе учится n ребят. Учитель хочет отправить на олимпиаду команду произвольного размера, один из членов которой был бы капитаном. Из скольких вариантов ему нужно выбирать?

б) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

в) Найдите сумму $C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n$.

г) Найдите сумму $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n+1} nC_n^n$.

6. Даны натуральные числа $k < m < n$. Докажите, что $(C_n^k, C_n^m) > 1$.