8 класс Рациональное и иррациональное 29 сентября 2018

1. Рационально ли число $0,123456789101112131415...$?

2. Докажите, что высота в треугольнике с рациональными длинами сторон делит противоположную сторону на отрезки рациональной длины.

3. Докажите, что в десятичной записи числа $\sqrt{2018}$ можно переставить цифры так, что полученная дробь станет рациональным числом.

4. Найдите все значения a, для которых выражения $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ одновременно принимают целые значения.

5. Докажите, что существуют иррациональные α и β такие, что число α^β рационально.

6. Найдите все x такие, при которых среди четырёх чисел $a = x-\sqrt{2}$, $b = x-\frac{1}{x}$, $c = x+\frac{1}{x}$, $d = x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым.

7. Можно ли нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах целочисленной решётки?

8. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

9. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца ("таблица умножения"). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

10. Даны числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = a$. Известно, что число $|x_i-a|$ нечетно для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что все x_i иррациональны.

11. Докажите, что существуют $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $|m\sqrt{2}-n| < \frac{1}{10^{100}}$.

8 класс Рациональное и иррациональное 29 сентября 2018

1. Рационально ли число $0,123456789101112131415...$?

2. Докажите, что высота в треугольнике с рациональными длинами сторон делит противоположную сторону на отрезки рациональной длины.

3. Докажите, что в десятичной записи числа $\sqrt{2018}$ можно переставить цифры так, что полученная дробь станет рациональным числом.

4. Найдите все значения a, для которых выражения $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ одновременно принимают целые значения.

5. Докажите, что существуют иррациональные α и β такие, что число α^β рационально.

6. Найдите все x такие, при которых среди четырёх чисел $a = x-\sqrt{2}$, $b = x-\frac{1}{x}$, $c = x+\frac{1}{x}$, $d = x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым.

7. Можно ли нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах целочисленной решётки?

8. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

9. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца ("таблица умножения"). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

10. Даны числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = a$. Известно, что число $|x_i-a|$ нечетно для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что все x_i иррациональны.

11. Докажите, что существуют $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $|m\sqrt{2}-n| < \frac{1}{10^{100}}$.