

Определение. Связный граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его *гранями*. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, так называемая внешняя грань.

1. **а)** Докажите, что двудольный граф, у которого одна из долей содержит не больше двух вершин, планарен. **б)** Существует ли планарный граф на 6 вершинах, все степени которого равны 3? **в)** Существует ли планарный граф на 6 вершинах, все степени которого равны 4?

2. **Формула Эйлера.** В любом планарном графе выполнено равенство $V - P + G = 2$, где V — количество вершин, P — количество рёбер и G — количество граней. (*Указание: начните с деревьев.*)

3. Докажите, что в планарном графе на $V \geq 3$ вершинах верно
а) $2P \geq 3G$; б) $P \leq 3V - 6$.

4. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо красный, либо синий граф не является планарным.

5. Существует ли многогранник, у которого одна грань — пятиугольник, а остальные — четырёхугольники?

6. Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не выше 5.

7. Докажите, что для планарного графа, у которого все вершины имеют степень 3, верно $12 + \sum_{k=3}^{\infty} (k - 6)p_k = 0$, где p_k — количество k -угольных граней.

8. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, что ломанным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.

9. Докажите, что полный граф на n вершинах при $n \geq 5$ не планарен.

10. *Фуллерен* — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч).

Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.

11. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?

Определение. Связный граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его *гранями*. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, так называемая внешняя грань.

1. **а)** Докажите, что двудольный граф, у которого одна из долей содержит не больше двух вершин, планарен. **б)** Существует ли планарный граф на 6 вершинах, все степени которого равны 3? **в)** Существует ли планарный граф на 6 вершинах, все степени которого равны 4?

2. **Формула Эйлера.** В любом планарном графе выполнено равенство $V - P + G = 2$, где V — количество вершин, P — количество рёбер и G — количество граней. (*Указание: начните с деревьев.*)

3. Докажите, что в планарном графе на $V \geq 3$ вершинах верно
а) $2P \geq 3G$; б) $P \leq 3V - 6$.

4. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо красный, либо синий граф не является планарным.

5. Существует ли многогранник, у которого одна грань — пятиугольник, а остальные — четырёхугольники?

6. Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не выше 5.

7. Докажите, что для планарного графа, у которого все вершины имеют степень 3, верно $12 + \sum_{k=3}^{\infty} (k - 6)p_k = 0$, где p_k — количество k -угольных граней.

8. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, что ломанным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.

9. Докажите, что полный граф на n вершинах при $n \geq 5$ не планарен.

10. *Фуллерен* — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч).

Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.

11. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?