8 класс

Обходы графов

10 ноября 2018

Определения. *Путь* в графе — это последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

Простой путь (цикл) — это путь (цикл), который проходит через каждую вершину не более одного раза.

Гамильтонов путь (цикл) — это простой путь (цикл), который проходит по всем вершинам графа.

Эйлеров путь (цикл) — это путь (цикл), который проходит по всем ребрам графа по одному разу.

1. а) Докажите, что если в графе степени всех вершин четные, то его можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам циклов.

б) Докажите, что если в связном графе степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл.

2. Докажите, что если в графе ровно 200 вершин нечетной степени, то его можно представить в виде объединения непересекающихся циклов и 100 самонепересекающихся путей.

3. Найдите максимальное возможное количество ребер в планарном графе на $n \geqslant 5$ вершинах, в котором есть эйлеров путь.

4. В графе на n вершинах ребра пронумерованы $1, \ldots, q$. Докажите, что в графе есть путь длины хотя бы $\frac{2q}{n}$ такой, что все ребра в нем идут в порядке возрастания.

5. Минимальная степень вершины в графе равна $m \geqslant 2$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины хотя бы $m+1$.

6. Про связный граф известно, что количество ребер в нем хотя бы в k раз больше, чем количество вершин.

а) Докажите, что найдется подграф, в котором минимальная степень вершины больше k.

б) Докажите, что в графе найдется простой цикл длины хотя бы $k+2$.

7. В графе максимальный простой путь $v_1 \ldots v_n$ имеет длину $n > 2$. Сумма степеней v_1 и v_n хотя бы n. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

8. Теорема Оре. Дан граф на n вершинах.

а) Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы $n-1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.

б) Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы n. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

9. Степени всех вершин связного графа хотя бы m, где $m \geqslant 3$. Найдите наименьшее число вершин в таком графе, если известно, что в нём нет гамильтонова цикла.

8 класс

Обходы графов

10 ноября 2018

Определения. *Путь* в графе — это последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

Простой путь (цикл) — это путь (цикл), который проходит через каждую вершину не более одного раза.

Гамильтонов путь (цикл) — это простой путь (цикл), который проходит по всем вершинам графа.

Эйлеров путь (цикл) — это путь (цикл), который проходит по всем ребрам графа по одному разу.

1. а) Докажите, что если в графе степени всех вершин четные, то его можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам циклов.

б) Докажите, что если в связном графе степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл.

2. Докажите, что если в графе ровно 200 вершин нечетной степени, то его можно представить в виде объединения непересекающихся циклов и 100 самонепересекающихся путей.

3. Найдите максимальное возможное количество ребер в планарном графе на $n \geqslant 5$ вершинах, в котором есть эйлеров путь.

4. В графе на n вершинах ребра пронумерованы $1, \ldots, q$. Докажите, что в графе есть путь длины хотя бы $\frac{2q}{n}$ такой, что все ребра в нем идут в порядке возрастания.

5. Минимальная степень вершины в графе равна $m \geqslant 2$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины хотя бы $m+1$.

6. Про связный граф известно, что количество ребер в нем хотя бы в k раз больше, чем количество вершин.

а) Докажите, что найдется подграф, в котором минимальная степень вершины больше k.

б) Докажите, что в графе найдется простой цикл длины хотя бы $k+2$.

7. В графе максимальный простой путь $v_1 \ldots v_n$ имеет длину $n > 2$. Сумма степеней v_1 и v_n хотя бы n. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

8. Теорема Оре. Дан граф на n вершинах.

а) Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы $n-1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.

б) Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы n. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

9. Степени всех вершин связного графа хотя бы m, где $m \geqslant 3$. Найдите наименьшее число вершин в таком графе, если известно, что в нём нет гамильтонова цикла.