8 класс **Геометрические конструкции** 8 декабря 2018

1. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике ABC точка пересечения серединного перпендикуляра к BC и биссектрисы угла A лежит на описанной окружности.

2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно. Точка W — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей B, а V — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, содержащей B.

а) Лемма о трезубце. Докажите, что $WA = WC = WI = WI_b$.

б) Внешняя лемма о трезубце. Докажите, что $VA = VC = VI_c = VI_a$.

3. Лемма об отражении ортоцентра. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно **а)** стороны; **б)** середины стороны, лежит на его описанной окружности.

4. а) Окружность Эйлера (окружность девяти точек). Докажите, что в треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины и ортоцентр, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что центр окружности Эйлера лежит в середине отрезка, концами которого являются ортоцентр и центр описанной окружности треугольника.

5. а) Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что длина отрезка BH вдвое больше расстояния от точки O до стороны AC.

б) Прямая Эйлера. Докажите, что точка M пересечения медиан лежит на отрезке HO и делит его в отношении $HM : MO = 2 : 1$.

6. Лемма Архимеда. Окружность ω касается окружности Ω внутренним образом в точке P и хорды AB окружности Ω в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AB окружности Ω, не содержащей точки P.

7. Лемма о проекции вершины на биссектрису. Окружность ω касается сторон AB, AC, BC треугольника ABC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная CB, биссектриса угла B и прямая A_1B_1 пересекаются в одной точке.

8. Лемма о симедиане. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBM$, где M — середина отрезка AC.

8 класс **Геометрические конструкции** 8 декабря 2018

1. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике ABC точка пересечения серединного перпендикуляра к BC и биссектрисы угла A лежит на описанной окружности.

2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно. Точка W — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей B, а V — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, содержащей B.

а) Лемма о трезубце. Докажите, что $WA = WC = WI = WI_b$.

б) Внешняя лемма о трезубце. Докажите, что $VA = VC = VI_c = VI_a$.

3. Лемма об отражении ортоцентра. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно **а)** стороны; **б)** середины стороны, лежит на его описанной окружности.

4. а) Окружность Эйлера (окружность девяти точек). Докажите, что в треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины и ортоцентр, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что центр окружности Эйлера лежит в середине отрезка, концами которого являются ортоцентр и центр описанной окружности треугольника.

5. а) Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что длина отрезка BH вдвое больше расстояния от точки O до стороны AC.

б) Прямая Эйлера. Докажите, что точка M пересечения медиан лежит на отрезке HO и делит его в отношении $HM : MO = 2 : 1$.

6. Лемма Архимеда. Окружность ω касается окружности Ω внутренним образом в точке P и хорды AB окружности Ω в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AB окружности Ω, не содержащей точки P.

7. Лемма о проекции вершины на биссектрису. Окружность ω касается сторон AB, AC, BC треугольника ABC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная CB, биссектриса угла B и прямая A_1B_1 пересекаются в одной точке.

8. Лемма о симедиане. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBM$, где M — середина отрезка AC.