8 класс — **Числа сочетаний** — 15 декабря 2018

Определение. Пусть имеется n предметов, k из них одного вида, а $n-k$ другого. Число различных способов выложить их в ряд обозначается C_n^k.

1. Придумайте комбинаторные доказательства тождеств

$C_n^k = C_n^{n-k}$; $\quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$; $\quad C_n^k \cdot C_k^{n-m} = C_n^m \cdot C_m^{n-k}$.

2. а) Докажите равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

б) Докажите, что $\dfrac{(d_1+d_2+\dots+d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$ — целое число.

в) Для натурального n докажите, что $C_{2n}^n \vdots n+1$.

3. Найдите суммы **(а)** $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$; **(б)** $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$.

4. В клетчатом квадрате $(n+1)\times(n+1)$ строки и столбцы пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$. Рассмотрим пути из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика.* Количество таких путей обозначается C_n и называется n-м *числом Каталана.*

а) Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Постройте биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

б) Постройте биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$-угольника диагоналями на треугольники.

в) Докажите, что число путей из $(0,0)$ в (n,n), которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0,0)$ в $(n-1,n+1)$. Выведите отсюда формулу для n-го числа Каталана.

5. Найдите сумму $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0$.

6. а) В классе n ребят. Учитель хочет отправить на олимпиаду команду произвольного размера, один из членов которой был бы капитаном. Из скольких вариантов ему нужно выбирать?

б) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

8 класс — **Числа сочетаний** — 15 декабря 2018

Определение. Пусть имеется n предметов, k из них одного вида, а $n-k$ другого. Число различных способов выложить их в ряд обозначается C_n^k.

1. Придумайте комбинаторные доказательства тождеств

$C_n^k = C_n^{n-k}$; $\quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$; $\quad C_n^k \cdot C_k^{n-m} = C_n^m \cdot C_m^{n-k}$.

2. а) Докажите равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

б) Докажите, что $\dfrac{(d_1+d_2+\dots+d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$ — целое число.

в) Для натурального n докажите, что $C_{2n}^n \vdots n+1$.

3. Найдите суммы **(а)** $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$; **(б)** $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$.

4. В клетчатом квадрате $(n+1)\times(n+1)$ строки и столбцы пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$. Рассмотрим пути из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика.* Количество таких путей обозначается C_n и называется n-м *числом Каталана.*

а) Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Постройте биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

б) Постройте биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$-угольника диагоналями на треугольники.

в) Докажите, что число путей из $(0,0)$ в (n,n), которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0,0)$ в $(n-1,n+1)$. Выведите отсюда формулу для n-го числа Каталана.

5. Найдите сумму $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0$.

6. а) В классе n ребят. Учитель хочет отправить на олимпиаду команду произвольного размера, один из членов которой был бы капитаном. Из скольких вариантов ему нужно выбирать?

б) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.