Серия 1. Периодическая

1. **(a)** Докажите, что чисто периодическая десятичная дробь имеет период длины d (не обязательно минимальный) тогда и только тогда, когда она представима в виде $\frac{X}{10^d-1}$, где X — целое число. **(b)** Предположим, что $n = 2^a 5^b m$, где a, b — целые неотрицательные числа, m — натуральное, $(m, 10) = 1$. Докажите, что длина минимального предпериода несократимой дроби k/n равна $\max(a, b)$, а длина её минимального периода — показателю числа 10 по модулю m.

2. При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12. Чему может быть равна длина минимального периода десятичной дроби $A + B$?

3. Сумма и произведение двух чисто периодических дробей являются чисто периодическими дробями с длиной минимального периода T. Докажите, что минимальные периоды самих этих дробей имеют длину не больше T.

4. Положительные числа a и b представлены в виде десятичных дробей, у обеих минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ минимальный период состоит из 15 цифр. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может тоже оказаться равной 15?

5. Последовательность a_n строится следующим образом: $a_1 = p$, где p — простое число, в десятичной записи которого ровно 300 ненулевых цифр. При любом натуральном n число a_{n+1} равняется наименьшему периоду дроби $1/a_n$, умноженному на 2 (смотрится период, а не длина периода). Найдите a_{2017}.

---

6. Будем говорить, что натуральное число *обладает свойством* $P(k)$, если оно представимо в виде произведения k подряд идущих натуральных чисел.
(a) Найдите какое-нибудь натуральное $k > 1$, для которого существует натуральное число, обладающее свойствами $P(k)$ и $P(k + 2)$.
(b) Существует ли натуральное число, обладающее свойствами $P(2)$ и $P(4)$?

7. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого более чем в сто раз превосходит сумму цифр самого числа?

8. В каждой клетке доски 100×100 написано некоторое целое число. За одно действие разрешается закрасить произвольный прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки, если сумма в этих клетках делится на 13. Дважды закрашивать одну и ту же клетку нельзя. При каком наибольшем k можно закрасить не менее k клеток вне зависимости от расположения чисел?

9. Числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ связаны соотношениями

$$a_1 - b_1 = 0;$$
$$a_2 - a_1 b_1 + b_2 = 0;$$
$$a_3 - a_2 b_1 + a_1 b_2 - b_3 = 0;$$
$$\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} b_1 + \ldots + (-1)^n b_n = 0.$$

Явно выразите $a_1, \ldots, a_n$ через $b_1, \ldots, b_n$.