Серия 4. Введение в теорию вероятностей

Дискретным *вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $\mathsf{P}(A)$ посредством формулы $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$. В частности, $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $f(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^{n} p_i f(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин f и g и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathbb{E}(f+g) = \mathbb{E}f + \mathbb{E}g$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathbb{E}(f)$.

1. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

2. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Аня хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?

3. У каждого из двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы по крайней мере пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго. (*Додекаэдр* — правильный многогранник, у которого 12 пятиугольных граней, 30 рёбер и 20 вершин, в которых сходится по три ребра.)

4. На плоскости отметили все $(n+1)^2$ точек с целыми координатами от 0 до n. Требуется провести несколько прямых так, чтобы все точки, кроме $(0,0)$, лежали хотя бы на одной из проведенных прямых и чтобы ни одна прямая не проходила через $(0,0)$. Каким наименьшим числом прямых можно обойтись?

5. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более чем $1/d$ его рёбер так, чтобы стало возможным раскрасить его вершины в d цветов правильным образом.

6. Петя вырезал из бумаги 2018 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.

7. Дано четное число $n > 2$. Клетки доски $n \times n$ раскрашены в $n^2/2$ цветов, каждого цвета — ровно по две клетки. Докажите, что можно расставить на доске n не бьющих друг друга ладей так, чтобы они все стояли на клетках разного цвета.

8. На столе лежит $2n$ визуально неразличимых батареек, из них ровно n хороших, а остальные n — плохие. За одну попытку разрешается вставить в фонарик две батарейки; при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число попыток удастся включить фонарик?