Серия 7. Экстремальные свойства графов

Обозначение. Символом K_m будем обозначать полный граф на m вершинах.
Основной результат в листике — теорема Турана о максимальном числе рёбер в графе на n вершинах, не содержащем K_m в качестве подграфа. Задачи 1 и 2 — альтернативные доказательства теоремы, достаточно сдать одну из них.

1. **Индуктивное доказательство теоремы Турана.**
(a) Докажите, что максимальное возможно число рёбер в графе $2n$ вершинах, не содержащем треугольника в качестве подграфа, равно n^2. (*Цель пункта — навести на идею.*)
(b) Докажите, что в графе G на n вершинах без подграфа K_m (где $n \geqslant m-1$) с максимальным возможным числом рёбер найдётся подграф K_{m-1}.
(c) Докажите, что в графе из предыдущего пункта G столько же рёбер, сколько в полном $(m-1)$-дольном графе на n вершинах с почти равными долями (т. е., размеры долей которого отличаются не более чем на 1).

2. **Доказательство теоремы Турана клонированием вершин.**
Клонированием вершины v некоторого графа назовём операцию добавления в граф новой вершины v'. При этом вершина v' будет соединена с теми и только с теми вершинами, с которыми была соединена вершина v.
(a) Докажите, что в графе, не содержащем подграфа K_m, при клонировании любой вершины не появится подграфа K_m.
Через G обозначим граф на n вершинах без подграфа K_m с максимальным возможным числом рёбер.
(b) Докажите, что степени любых двух несмежных вершин графа G равны.
(c) Докажите, что степени любых двух смежных вершин графа G отличаются не более чем на 1.
(d) Докажите, что если в графе G вершины u и v несмежны и вершины v и w несмежны, то вершины u и w также несмежны.
(e) Докажите, что граф G — полный $(m-1)$-дольный граф с почти равными долями.

3. В графе n вершин, а среди любых четырёх вершин проведено не более четырёх рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

4. За круглым столом сидят n человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

5. Каждое ребро некоторого графа на 60 вершинах покрашено в красный или синий цвет так, что нет одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

6. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

7. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в этом графе есть хотя бы n треугольников.

8. На плоскости отмечено $4n$ точек. Соединим отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1. Известно, что среди любых $n+1$ точек обязательно найдутся две, соединённые отрезком. Докажите, что проведено хотя бы $7n$ отрезков.