

## Серия 8. Разнобой по неравенствам

0. (*Неравенство Несбита*) Для любых положительных чисел  $a, b, c$  выполнено

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

1. Докажите, что для любого положительного значения  $a$  верно неравенство

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16.$$

2. Для произвольных положительных чисел  $a, b$  и  $c$  докажите, что

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

3. Докажите, что при всех положительных  $x, y, z$  выполнено неравенство:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z.$$

4. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношению  $abc = 1$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$ .

5. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношению  $a + b + c = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

6. (*Частный случай неравенства Шура*) Докажите, что для любых положительных чисел  $a, b, c$  верно

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

7. Числа  $a, b, c$  положительны. Докажите, что

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}.$$

8. Для любых неотрицательных чисел  $x, y, z$  докажите, что

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx}.$$